几何图形初步

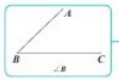
角

角的表示方法

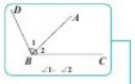


静态定义：有公共端点的两条射线组成的图形叫角，这个公共端点是角的顶点，这两条射线是角的两条边

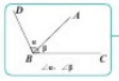
动态定义：角是由一条射线绕着它的端点旋转到另一个位置所成的图形，处于初始位置的那条射线叫做角的始边，终止位置的那条射线叫做角的终边



①用三个大写字母来表示，顶点一定要写在中间



②用一个大写字母来表示，这个大写字母一定要表示角的顶点，而且以它为顶点的角有且只有一个



③用数字来表示角

④用希腊字母来表示角

角的度量

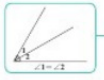
1 度 =60 分（1°=60′）；1 分 =60 秒（1′=60″）；1 周角 =360°，1 平角 =180°，1 直角 =90°；1 周角 =2 平角，1 平角 =2 直角

方向角



一般以“正北、正南”为基准，描述物体运动方向. 即“北偏东 XX 度”、“北偏西 XX 度”、“南偏东 XX 度”、“南偏西 XX 度”，方位角 α 的取值范围为 0≤α≤90°；“北偏东 45 度”为东北方向，“北偏西 45 度”为西北方向，“南偏东 45 度”为东南方向，“南偏西 45 度”为西南方向

角平分线



从一个角的顶点出发的一条射线，如果把这个角分成两个相等的角，这条射线就是这个角的角平分线

余角定义



如果两个锐角的和是 90°，那么这两个角互为余角，简称“互余”

补角定义



如果两个角的和是 180°，那么这两个角互为补角，简称“互补”

余角、补角的性质

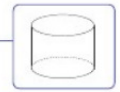
①同角或等角的余角相等

②同角或等角的补角相等

几何图形

常见几何体

圆柱：由三个面组成，上、下两个底面是半径相同的圆，侧面是曲面



棱柱：棱柱分为直棱柱和斜棱柱，一般只讨论直棱柱，其上、下两个面为形状、大小相同的多边形，其余各面为平行四边形，底面为 n 边形的棱柱叫 n 棱柱



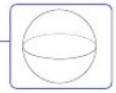
圆锥：由两个面围成，有一个底面是圆形，侧面为曲面，一个顶点



棱锥：由底面与侧面组成，底面为多边形，侧面为三角形，底面为 n 边形的棱锥叫 n 棱锥



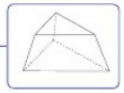
球：由一个曲面围成



圆台：由三个面围成，上、下两个底面是大小不等的圆形，侧面为曲面



棱台：上、下两个底面为多边形，侧面均为梯形



常见几何体的分类

按柱、锥、球分类

- 柱
  - 圆柱
  - 棱柱
- 锥
  - 圆锥
  - 棱锥
- 球

按是否有曲面分类

- 直面体
  - 棱柱
  - 棱锥
- 曲面体
  - 圆柱
  - 圆锥
  - 球

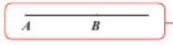
直线、射线和线段

直线



能够向两端无限延伸的线叫直线

射线



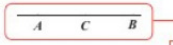
直线上的一点和这点一旁的部分叫射线，这个点叫做射线的端点

线段



直线上两点和中间的部分叫线段，这两个点叫线段的端点

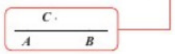
点与直线的关系



①点在直线上

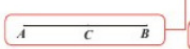
②点在直线外

中点



把一条线段分成两条相等线段的点叫做这条线段的中点

公理



① 经过两点有且只有一条直线，也称为“两点确定一条直线”

② 两点之间的连线中，线段最短，简称“两点之间，线段最短”

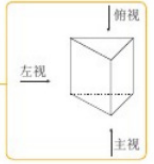
三视图

主视图、左视图、俯视图统称三视图

从正面看到的图叫主视图，也叫正视图

从左面看到的图叫左视图

从上面看到的图叫俯视图



概率

事件的分类

- **必然事件**：在一定条件下进行重复试验时，有些事情我们事先能肯定它一定发生，这些事情称为必然事件。比如：太阳从东边升起；地球绕太阳转等
- **不可能事件**：在一定条件下进行重复试验时，有些事情我们事先能肯定它一定不会发生，这些事情称为不可能事件。比如：太阳从西边升起；地球绕月球等
- **随机事件**：在一定条件下进行重复试验时，有些事情我们事先无法肯定它会不会发生，这些事情称为随机事件

概率的计算

用频率估计概率

在大量重复的试验中，我们常用不确定事件发生的频率来估计事件发生的概率

比如：我们在投一枚硬币，第一我们投 100 次，发现正面朝上的有 49 次，频率约为 0.5；第二次投 200 次，正面朝上的有 101 次，频率约为 0.5，……，我们在进行了大量的试验之后，发现正面朝上的频率在 0.5 左右变化，这样我们把频率 0.5 当做正面朝上的概率

列表法或用树状图求概率

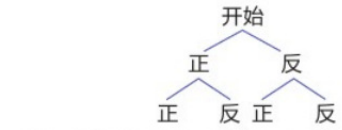
一般地，如果一个试验有 n 种等可能的结果，事件 A 包含其中的 m 种结果，那么事件 A 发生的概率为 $P(A)=\frac{m}{n}$

我们可以通过列表法和树状图表示出试验中所有的可能情况，并找出试验发生的结果，再求出概率

注意

(1) 有限性：试验中所有可能出现的基本事件只有有限个

(2) 等可能性：每个事件出现的可能性相等



所有可能的结果（正，正）（正，反）（反，正）（反，反）

第一枚硬币 \ 第二枚硬币	正	反
正	（正，正）	（正，反）
反	（反，正）	（反，反）

如：投一枚硬币，投两次，两次出现都是正面（中国人民银行，带有面值的一面）的概率（我们认为反面是菊花的一面）。用列表法和树状图说明

几何概率

$$P=\frac{\text{构成事件 } A \text{ 的区域的长度（面积或体积）}}{\text{试验的全部结果构成的长度（面积或体积）}}$$

公式

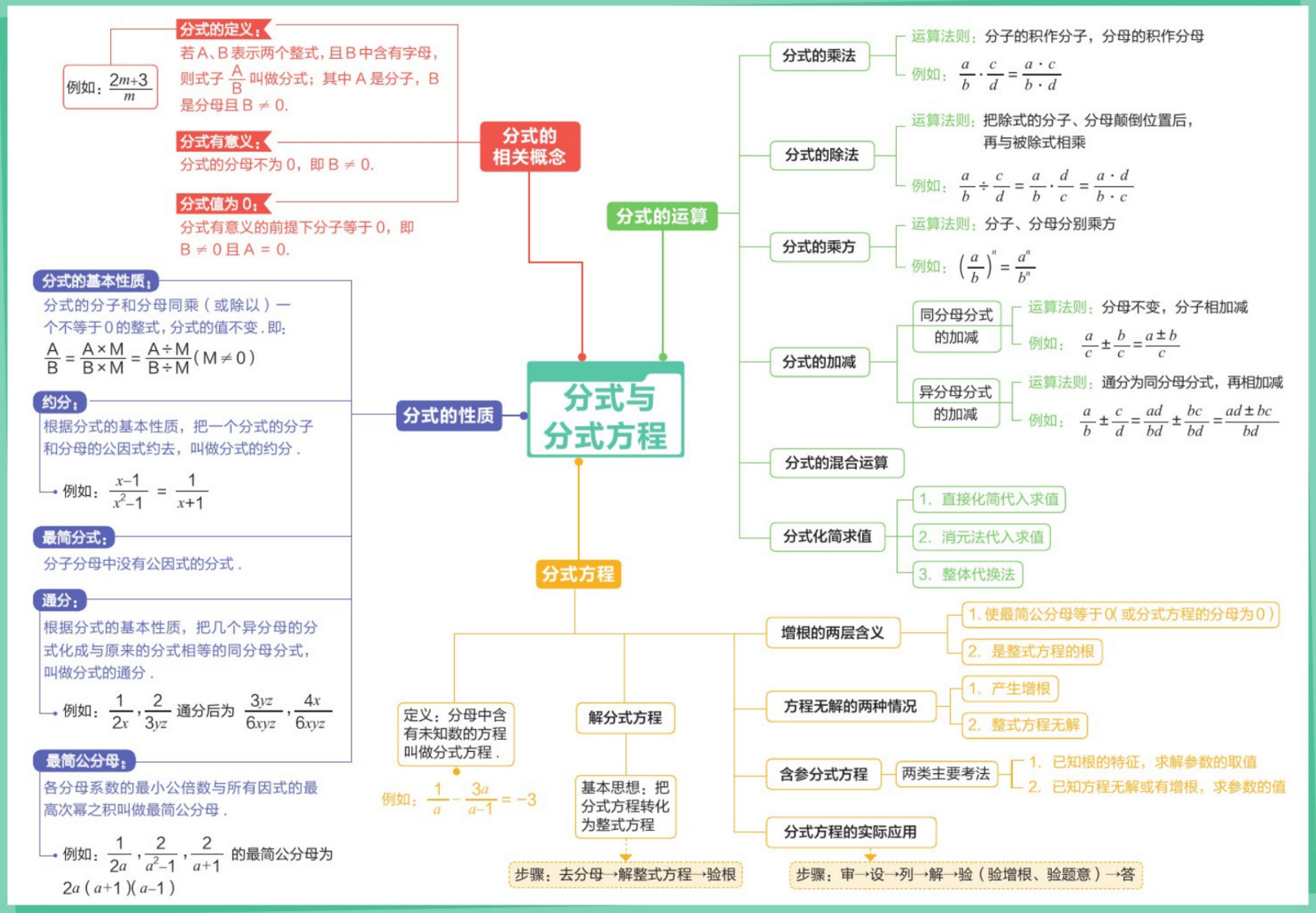
注意

（1）无限性：试验的结果是无限不可数的

（2）等可能性：每个结果出现的可能性相等

概率初步

- **一般地，随机事件发生的可能性是有大小的**：比如：袋里 10 个红球，2 个白球，任意摸一个球，摸到红球的可能性大
- **概率**：我们把表示事件发生的可能性大小的数值，称为事件 A 发生的概率，记为 $P(A)$
- **注意**
  - (1) 必然事件发生的概率为 1
  - (2) 不可能事件发生的概率为 0
  - (3) 随机事件 A 发生的概率 $P(A)$ 是介于 0 与 1 之间的一个常数


分式与分式方程
分式的相关概念
分式的定义：
若A、B表示两个整式，且B中含有字母，则式子 A/B 叫做分式；其中A是分子，B是分母且B ≠ 0.
例如：(2m+3)/m
分式有意义：
分式的分母不为0，即B ≠ 0.
分式值为0：
分式有意义的前提下分子等于0，即B ≠ 0且A = 0.
分式的性质
分式的基本性质：
分式的分子和分母同乘（或除以）一个不等于0的整式，分式的值不变.即：
A/B = (A×M)/(B×M) = (A÷M)/(B÷M)（M ≠ 0）
约分：
根据分式的基本性质，把一个分式的分子和分母的公因式约去，叫做分式的约分.
例如：(x−1)/(x²−1) = 1/(x+1)
最简分式：
分子分母中没有公因式的分式.
通分：
根据分式的基本性质，把几个异分母的分式化成与原来的分式相等的同分母分式，叫做分式的通分.
例如：1/2x，2/3yz 通分后为 3yz/6xyz，4x/6xyz
最简公分母：
各分母系数的最小公倍数与所有因式的最高次幂之积叫做最简公分母.
例如：1/2a，2/(a²−1)，2/(a+1) 的最简公分母为 2a(a+1)(a−1)
分式的运算
分式的乘法
运算法则：分子的积作分子，分母的积作分母
例如：a/b · c/d = (a·c)/(b·d)
分式的除法
运算法则：把除式的分子、分母颠倒位置后，再与被除式相乘
例如：a/b ÷ c/d = a/b · d/c = (a·d)/(b·c)
分式的乘方
运算法则：分子、分母分别乘方
例如：(a/b)^n = a^n/b^n
分式的加减
同分母分式的加减
运算法则：分母不变，分子相加减
例如：a/c ± b/c = (a±b)/c
异分母分式的加减
运算法则：通分为同分母分式，再相加减
例如：a/b ± c/d = ad/bd ± bc/bd = (ad±bc)/bd
分式的混合运算
分式化简求值
1. 直接化简代入求值
2. 消元法代入求值
3. 整体代换法
分式方程
定义：分母中含有未知数的方程叫做分式方程.
例如：1/a − 3a/(a−1) = −3
解分式方程
基本思想：把分式方程转化为整式方程
步骤：去分母→解整式方程→验根
增根的两层含义
1. 使最简公分母等于0（或分式方程的分母为0）
2. 是整式方程的根
方程无解的两种情况
1. 产生增根
2. 整式方程无解
含参分式方程
两类主要考法
1. 已知根的特征，求解参数的取值
2. 已知方程无解或有增根，求参数的值
分式方程的实际应用
步骤：审→设→列→解→验（验增根、验题意）→答

反比例函数

定义

形如 $y=\frac{k}{x}$（k 是常数，$k\neq 0$）的函数叫做反比例函数，其中 x 是自变量，y 是函数

注： (1) $k\neq 0$

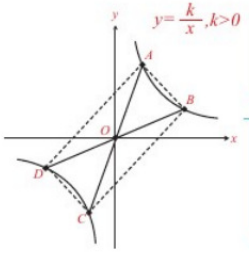
(2) 自变量 x 的取值范围是 $x\neq 0$，函数值的取值范围 $y\neq 0$

(3) 反比例函数常见的三种表达形式：① $y=\frac{k}{x}$ ② $y=k\cdot x^{-1}$ ③ $xy=k(k\neq 0)$

图象与性质

- **图象**：反比例函数的图象是两条曲线，分布在一、三象限，或者二、四象限
- **性质** $y=\frac{k}{x}$
  - $k>0$，图象分布在一、三象限，它们关于原点对称，在每一个象限内，y 随 x 的增大而减小
  - $k<0$，图象分布在二、四象限，它们关于原点对称，在每一个象限内，y 随 x 的增大而增大
  - 对称性：反比例函数图象关于坐标原点中心对称，关于 $y=\pm x$ 这两条直线轴对称
- **$|k|$ 对反比例函数图象的影响**
  - $|k|$ 越小，双曲线离原点的距离越近
  - $|k|$ 越大，双曲线离原点的距离越远

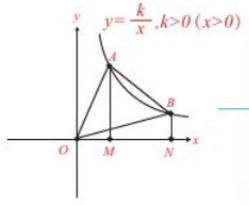
反比例函数图象与图形的常见结论



如图，过原点的直线 AC、BD 与双曲线相交，连接 AB、CD、BC、AD

有以下结论：

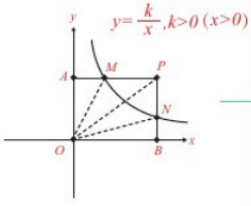
1. 点 A 与点 C 关于原点对称，点 B 和点 D 关于原点对称
2. 四边形 $ABCD$ 为平行四边形
3. $S_{四边形\,ABCD}=4S_{\triangle AOB}$



如图，A、B 为反比例函数图象上的点，连接 OA、OB，过点 A 作 $AM\perp x$ 轴，过点 B 作 $BN\perp x$ 轴

有以下结论：

1. $S_{\triangle AOM}=S_{\triangle BON}$
2. $S_{\triangle AOB}=S_{四边形\,AMNB}$



如图，矩形 $AOBP$，AP 与双曲线交于点 M，BP 与双曲线交于点 N，连接 OM，OP，ON

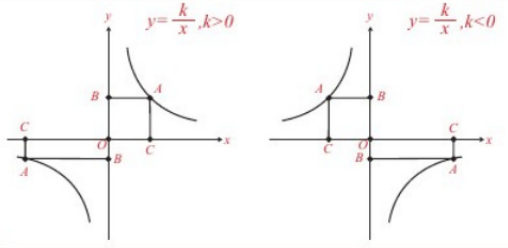
有以下结论：

1. $S_{\triangle AOM}=S_{\triangle BON}$
2. $S_{\triangle POM}=S_{\triangle PON}$
3. $\frac{AM}{MP}=\frac{BN}{NP}$

$|k|$ 的几何意义

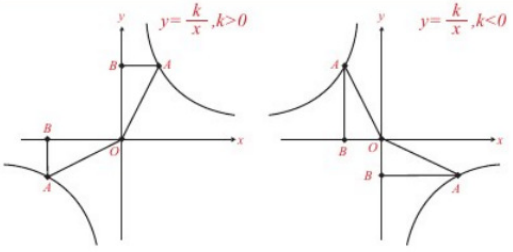
- **$|k|$ 与矩形面积的关系**

在反比例函数图象上任取一点 A，过点 A 向 x 轴、y 轴分别作垂线，垂足分别为 C、B，点 A、B、C、O 构成矩形 $ABOC$，则 $S_{矩形\,ABOC}=|k|$



- **$|k|$ 与三角形面积的关系**

在反比例函数图象上任取一点 A，过点 A 向 x 轴或 y 轴作垂线，垂足分别为 B，点 A、B、O 构成三角形 ABO，则 $S_{\triangle ABO}=\frac{|k|}{2}$



二元一次方程组

二元一次方程

定义：含有两个未知数，并且含有未知数的项的次数都是 1 的整式方程叫二元一次方程 .

一般形式：$ax + by + c = 0 (a \neq 0, b \neq 0)$

二元一次方程的解：使二元一次方程左右两边的值相等的两个未知数的值，叫做二元一次方程的解 .

任何一个二元一次方程都有无数个解 .

二元一次方程组

定义：有两个未知数，含有每个未知数的项的次数都是 1，并且一共有两个方程，像这样的方程组，叫做二元一次方程组 .

二元一次方程组的解：使二元一次方程组的两个方程左右两边的值都相等的两个未知数的值（即两个方程的公共解），叫做二元一次方程组的解 .

不定方程（组）是指未知数的个数多于方程的个数的方程（组），其特点是解往往有无穷个，不能唯一确定 .

三元一次方程组

定义：方程组含有三个未知数，并且含未知数的项的次数都是 1，并且一共有三个整式方程 .

对于解三元一次方程组应先消元转化为二元一次方程组，然后可以用整体法、倒数法、分类讨论法解决较复杂的二元一次方程组

二元一次方程组的解法

基本解法

代入消元法

把方程组中的一个方程进行变形，用一个未知数 x（或 y）表示另一个未知数 y（或 x）的代数式，然后把它代入另一个方程中，消去未知数 y（或 x），得到关于 x（或 y）的一元一次方程，通过解这个一元一次方程，再来求二元一次方程组的解 . 我们把这种通过“代入”消去一个未知数，从而求出方程组的解的方法叫做代入消元法 .

加减消元法

当二元一次方程组中两个方程的某个未知数的系数互为相反数或相等时，可以把方程的两边分别相加（当某个未知数的系数互为相反数时）或相减（当某个未知数的系数相等时）来消去这个未知数，得到一个一元一次方程，进而求得二元一次方程组的解 . 像上面这种解二元一次方程组的方法叫做加减消元法 .

当二元一次方程组比较复杂时，应先化简，利用去分母、去括号、合并同类项等将其变为简单的二元一次方程组后再选择合适的消元法求解 .

总结

一、判断一个方程是二元一次方程必须同时满足三个条件

1. 含有两个未知数——“二元”；（注意：未知数的系数不能为 0）.
2. 含有未知数的项的最高次数为 1——“一次”；
3. 方程两边的代数式都是整式——整式方程 .

二、整数解

方程的个数少于未知数的个数时，一般是不定解，即有无数多解，若要求整数解，可按二元一次方程整数解的求法进行 .

三、判断是否是二元一次方程组

二元一次方程组不一定由两个二元一次方程合在一起，有的方程可以只有一元（一元方程在这里也可看作另一个未知数系数为 0 的二元 一次方程），方程可以超过两个 .

四、方程组解的情况

一般情况下，一个二元一次方程组只有唯一一组解；但二元一次方程组的解还有另外两种情况：无解或有无数组解 .

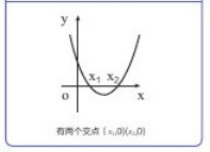
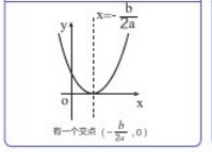
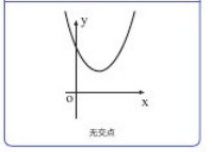
二次函数

二次函数与一元二次方程（不等式）的关系

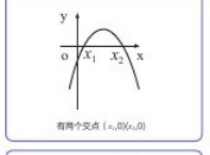
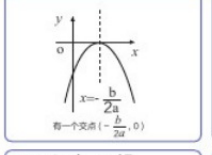
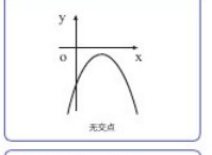
二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴交点的横坐标就是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解．反之亦然

二次函数 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ 的图象与 x 轴的交点

$a>0$

$b^2-4ac>0$	$b^2-4ac=0$	$b^2-4ac<0$
		
有两个交点 $(x_1,0)(x_2,0)$	有一个交点 $(-\frac{b}{2a},0)$	无交点
$y>0$ 时，$x<x_1$ 或 $x>x_2$ $y<0$ 时，$x_1<x<x_2$	$y>0$ 时，$x\neq -\frac{b}{2a}$ $y<0$ 时，无解	$y>0$ 时，全体实数 $y<0$ 时，无解

$a<0$

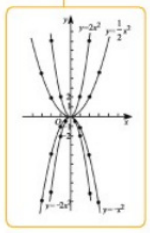
$b^2-4ac>0$	$b^2-4ac=0$	$b^2-4ac<0$
		
有两个交点 $(x_1,0)(x_2,0)$	有一个交点 $(-\frac{b}{2a},0)$	无交点
$y>0$ 时，$x_1<x<x_2$ $y<0$ 时，$x<x_1$ 或 $x>x_2$	$y>0$ 时，无解 $y<0$ 时，$x\neq -\frac{b}{2a}$	$y>0$ 时，无解 $y<0$ 时，全体实数

二次函数定义

定义：一般地，形如 $y=ax^2+bx+c(a,b,c$ 是常数，$a\neq 0)$ 的函数，叫做二次函数
其中 x 是自变量，a，b，c 分别是函数表达式的二次项系数，一次项系数和常数项

三种解析式

一般式：$y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$



a 决定了抛物线开口的大小和方向，a 的正负决定开口方向，$|a|$ 的大小决定开口的大小

对称轴：直线 $x=-\frac{b}{2a}$
a，b 的符号与对称轴的关系："左同右异"

c 决定了抛物线与 y 轴交点的位置

顶点 $(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$

顶点式：$y=a(x-h)^2+k\ (a\neq 0)$
- 顶点 (h,k)
- 对称轴直线 $x=h$

双根式：$y=a(x-x_1)(x-x_2)\ (a\neq 0)$
- $a(x-x_1)(x-x_2)=0$ 的实数根为：x_1，x_2
- 与 x 轴的交点：$(x_1,0)$，$(x_2,0)$
- 对称轴：直线 $x=\frac{x_1+x_2}{2}$

图象变换

二次函数 $y=ax^2$ 与 $y=a(x-h)^2+k\ (a\neq 0)$ 的图象间的关系（平移）

$y=a(x-h)^2+k$ 是由抛物线 $y=ax^2$ 向右（或左）平移 $|h|$ 个单位长度，再向上（或下）平移 $|k|$ 个单位长度

平移口诀八个字"左加右减，上加下减"

对称
1. 关于 x 轴对称
2. 关于 y 轴对称
3. 关于原点对称
4. 关于顶点对称（即：抛物线绕顶点旋转 180°）
5. 关于点 (m,n) 对称

待定系数法求解析式

1. 利用一般式求二次函数的解析式
2. 利用顶点式求二次函数的解析式
3. 利用双根式（也叫交点式）求二次函数的解析式

实际应用

- 建立二次函数模型
- 利用二次函数求图形面积的最值问题
- 利用二次函数求最大利润问题
- 利用二次函数解决抛物线形（轨迹、建筑物）问题
- 利用二次函数解决动点问题

二次函数

图象与性质

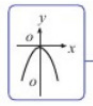
$y=ax^2(a\neq 0)$



$a>0$

开口方向：向上 —— 对称轴：y 轴

顶点 $(0,0)$ —— $x>0$ 时，y 随 x 的增大而增大；$x<0$ 时，y 随 x 的增大而减小；有最小值：$x=0$，$y_{最小值}=0$

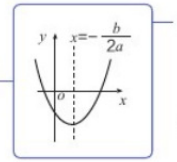


$a<0$

开口方向：向下 —— 对称轴：y 轴

顶点 $(0,0)$ —— $x>0$ 时，y 随 x 的增大而减小；$x<0$ 时，y 随 x 的增大而增大；有最大值：$x=0$，$y_{最大值}=0$

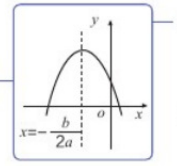
$y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$



$a>0$

开口方向：向上 —— 对称轴：直线 $x=-\frac{b}{2a}$

顶点 $(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$ —— $x>-\frac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而增大；$x<-\frac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而减小；抛物线有最低点；$x=-\frac{b}{2a}$，$y_{最小值}=\frac{4ac-b^2}{4a}$

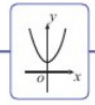


$a<0$

开口方向：向下 —— 对称轴：直线 $x=-\frac{b}{2a}$

顶点 $(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$ —— $x>-\frac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而减小；$x<-\frac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而增大；抛物线有最高点；$x=-\frac{b}{2a}$，$y_{最大值}=\frac{4ac-b^2}{4a}$

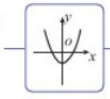
$y=ax^2+c(a\neq 0)$



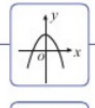
$c>0$

开口方向：向上 —— 对称轴：y 轴

顶点 $(0,c)$ —— $x>0$ 时，y 随 x 的增大而增大；$x<0$ 时，y 随 x 的增大而减小；有最小值：$x=0$，$y_{最小值}=c$



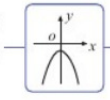
$c<0$



$c>0$

开口方向：向下 —— 对称轴：y 轴

顶点 $(0,c)$ —— $x>0$ 时，y 随 x 的增大而减小；$x<0$ 时，y 随 x 的增大而增大；有最大值：$x=0$，$y_{最大值}=c$

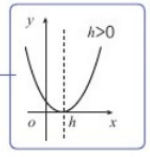


$c<0$

$a>0$

$a<0$

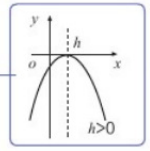
$y=a(x-h)^2(a\neq 0)$



$a>0$ $h>0$ $h<0$

开口方向：向上 —— 对称轴：直线 $x=h$

顶点 $(h,0)$ —— $x>h$ 时，y 随 x 的增大而增大；$x<h$ 时，y 随 x 的增大而减小；有最小值：$x=h$，$y_{最小值}=0$

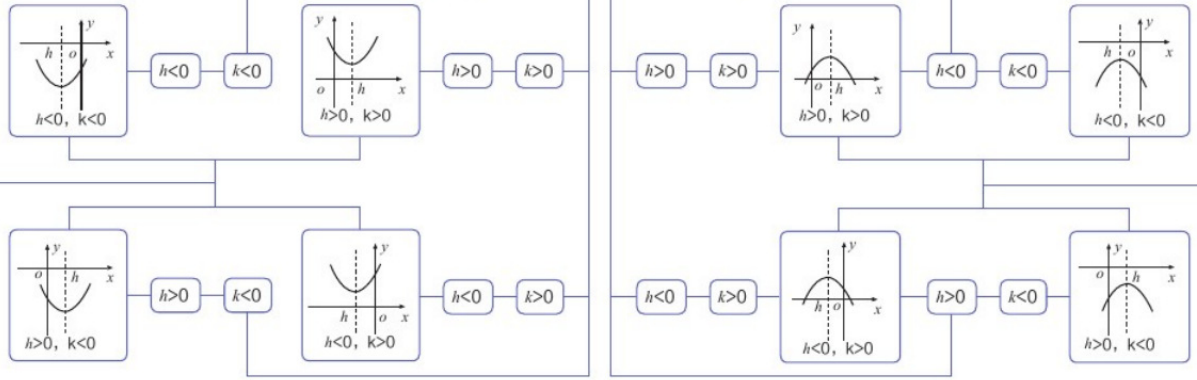


$a<0$ $h>0$ $h<0$

开口方向：向下 —— 对称轴：直线 $x=h$

顶点 $(h,0)$ —— $x>h$ 时，y 随 x 的增大而减小；$x<h$ 时，y 随 x 的增大而增大；有最大值：$x=h$，$y_{最大值}=0$

$y=a(x-h)^2+k(a\neq 0)$



$a>0$ $a<0$

$h<0$，$k<0$ $h>0$，$k>0$ $h>0$，$k<0$ $h<0$，$k>0$

开口方向：向上

对称轴：直线 $x=h$

顶点 (h,k)

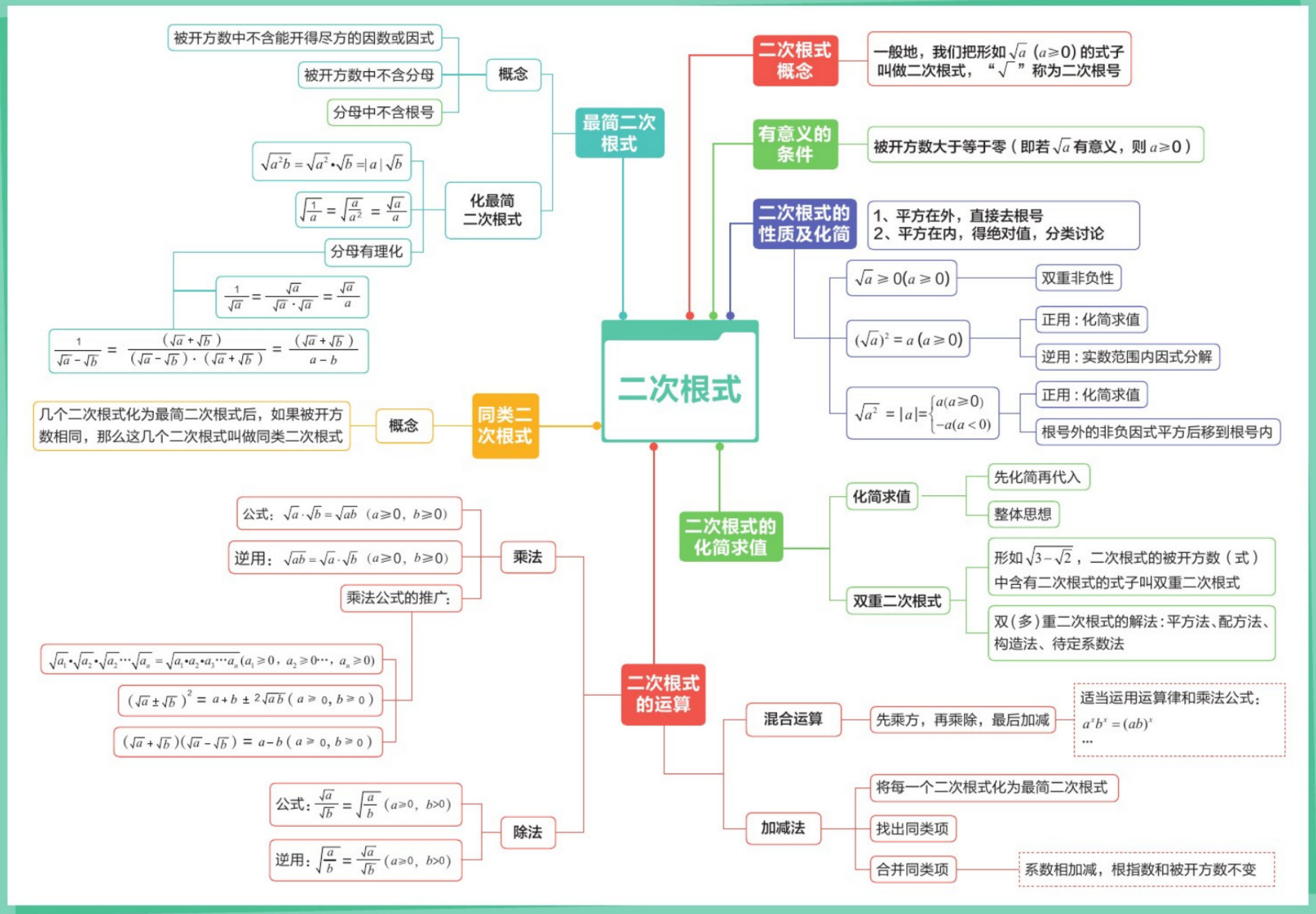
$x>h$ 时，y 随 x 的增大而增大；$x<h$ 时，y 随 x 的增大而减小；有最小值：$x=h$，$y_{最小值}=k$

开口方向：向下

对称轴：直线 $x=h$

顶点 (h,k)

$x>h$ 时，y 随 x 的增大而减小；$x<h$ 时，y 随 x 的增大而增大；有最大值：$x=h$，$y_{最大值}=k$


二次根式
二次根式概念
一般地，我们把形如$\sqrt{a}$ $(a\geqslant 0)$的式子叫做二次根式，“$\sqrt{\ }$”称为二次根号
有意义的条件
被开方数大于等于零（即若$\sqrt{a}$有意义，则$a\geqslant 0$）
二次根式的性质及化简
1、平方在外，直接去根号
2、平方在内，得绝对值，分类讨论
$\sqrt{a}\geqslant 0(a\geqslant 0)$
双重非负性
$(\sqrt{a})^2=a\ (a\geqslant 0)$
正用：化简求值
逆用：实数范围内因式分解
$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a(a\geqslant 0)\\-a(a<0)\end{cases}$
正用：化简求值
根号外的非负因式平方后移到根号内
最简二次根式
概念
被开方数中不含能开得尽方的因数或因式
被开方数中不含分母
分母中不含根号
化最简二次根式
$\sqrt{a^2b}=\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{b}=|a|\sqrt{b}$
$\sqrt{\frac{1}{a}}=\sqrt{\frac{a}{a^2}}=\frac{\sqrt{a}}{a}$
分母有理化
$\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}}{a}$
$\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})\cdot(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}$
同类二次根式
概念
几个二次根式化为最简二次根式后，如果被开方数相同，那么这几个二次根式叫做同类二次根式
二次根式的化简求值
化简求值
先化简再代入
整体思想
双重二次根式
形如$\sqrt{3-\sqrt{2}}$，二次根式的被开方数（式）中含有二次根式的式子叫双重二次根式
双（多）重二次根式的解法：平方法、配方法、构造法、待定系数法
二次根式的运算
乘法
公式：$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}\ (a\geqslant 0,\ b\geqslant 0)$
逆用：$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\ (a\geqslant 0,\ b\geqslant 0)$
乘法公式的推广：
$\sqrt{a_1}\cdot\sqrt{a_2}\cdot\sqrt{a_2}\cdots\sqrt{a_n}=\sqrt{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots a_n}(a_1\geqslant 0,\ a_2\geqslant 0\cdots,\ a_n\geqslant 0)$
$(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})^2=a+b\pm 2\sqrt{ab}\ (a\geqslant 0,b\geqslant 0)$
$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b\ (a\geqslant 0,b\geqslant 0)$
除法
公式：$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}\ (a\geqslant 0,\ b>0)$
逆用：$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\ (a\geqslant 0,\ b>0)$
混合运算
先乘方，再乘除，最后加减
适当运用运算律和乘法公式：
$a^xb^x=(ab)^x$
…
加减法
将每一个二次根式化为最简二次根式
找出同类项
合并同类项
系数相加减，根指数和被开方数不变

乘法公式及应用

平方差公式

定义

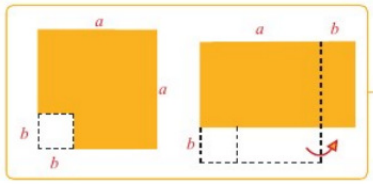
两个数的和与这两个数的差的积等于这两个数的平方差，这个公式叫做乘法的平方差公式。

例如

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$(a^2+4)(a^2-4)=a^4-16$

平方差公式的几何意义



注意

1. 公式中 a,b 各自代表的内容，可以是数、字母、单项式和多项式等

2. 公式中 a,b 的位置可以变化，$(b+a)(-b+a)=a^2-b^2$

完全平方公式

定义

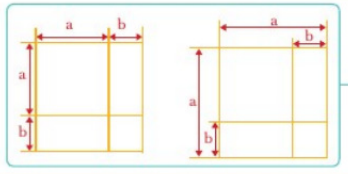
两数和（或差）的平方，等于它们的平方和，加（或减）它们的积的 2 倍，这两个公式叫做完全平方公式

例如

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

完全平方公式的几何意义



注意

1. 公式中 a 或 b 可以是数字、单个字母、单项式、多项式等

2. 注意：等号右边的各自的平方和还要加减乘积的 2 倍，当然如果是两数的和就加上 2 倍乘积，如果是两数差，就减去 2 倍乘积

乘法公式的应用

由完全平方公式 $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$ 可推出以下公式变形

1. $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$

2. $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

3. $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(a-b)^2+2ab=\dfrac{(a+b)^2+(a-b)^2}{2}$

4. $ab=\dfrac{(a+b)^2-(a^2+b^2)}{2}=\dfrac{(a^2+b^2)-(a-b)^2}{2}=\dfrac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4}$

整式的乘法

幂的运算

同底数幂乘法

同底数的幂相乘，底数不变，指数相加

$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$（m、n 都是正整数）

例如：$a^2\cdot a^4=a^{2+4}=a^6$

幂的乘方

幂的乘方的运算法则：底数不变，指数相乘

$(a^m)^n=a^{mn}$（m、n 都是正整数）

例如：$(a^2)^3=a^{2\times 3}=a^6$

积的乘方

积的乘方，等于把积的每一个因式分别乘方，再把所得的幂相乘

$(ab)^n=a^nb^n$（n 是正整数）

例如：$(a^2b)^3=(a^2)^3b^3=a^6b^3$

同底数幂除法

同底数的幂相除，底数不变，指数相减

$a^m\div a^n=a^{m-n}$（$a\neq 0$，m、n 都是正整数且 $m>n$）

例如：$a^3\div a^2=a$

规定

①当 $a\neq 0$ 时，$a^0=1$

②当 $a\neq 0$ 时，$a^{-p}=\dfrac{1}{a^p}$（p 为正整数）

注意

零指数次幂与负指数次幂的计算中，底数不能为零

整式乘法

单项式与单项式相乘

单项式与单项式相乘，把它们的系数、相同字母的幂分别相乘，其余字母连同它的指数不变，作为积的因式

$3a\cdot a=3a^2$

$3a\cdot 2ac=6a^2c$

单项式与多项式相乘

单项式与多项式相乘，就是根据乘法分配律用单项式去乘多项式的每一项，再把所得的积相加

$m(a+b+c)=ma+mb+mc$

例如：$3x(2x-5)=6x^2-15x$

多项式与多项式相乘

多项式与多项式相乘，先用一个多项式的每一项去乘另一个多项式的每一项，再把所得的积相加

$(m+n)(a+b)=m(a+b)+n(a+b)=ma+mb+na+nb$

例如：$(x-6)(x-3)=x^2-9x+18$

例如：$(2x-3y)(x+4y)=2x^2+5xy-12y^2$

注意

- 不要丢掉单独的字母或数字
- 我们在写等号右面的结果时，通常按照某个字母的降幂或者升幂排列
- 单项式中的字母一般按照英文字母的顺序排列
- 多项式乘以多项式的结果中，检查是否可以合并同类项，能合并的必须合并
- 注意计算中的格式问题，通常用“原式=”

一次函数

一次函数性质

定义：一般地，形如 $y=kx+b$（k、b 是常数，$k \neq 0$）的函数，叫做一次函数

当 $b=0$ 时，$y=kx+b$ 即 $y=kx$，称为正比例函数，所以说正比例函数是一种特殊的一次函数

说明：
1. k 不为零
2. x 指数为 1
3. b 取任意实数

解析式：$y=kx+b$（k、b 是常数，$k \neq 0$）

图象：一次函数 $y=kx+b$ 的图象是必经过 $(-\frac{b}{k}, 0)$ 和 $(0, b)$ 两点的一条直线

增减性（单调性）
- $k>0$，y 随 x 的增大而增大（单调增）
- $k<0$，y 随 x 的增大而减小（单调减）

必过点：$(0, b)$ 和 $(-\frac{b}{k}, 0)$

函数的基本知识

函数：一般地，在一个变化过程中，如果有两个变量 x 和 y，并且对于 x 的每一个确定的值，y 都有唯一确定的值与其对应，我们就把 x 称为自变量，把 y 称为因变量，y 是 x 的函数

函数的图象：一般来说，对于一个函数，如果把自变量与函数的每对对应值分别作为点的横，纵坐标，坐标平面内由这些点组成的图形，就是这个函数的图象

变量：在一个变化过程中可以取不同数值的量

常量：在一个变化过程中只能取同一数值的量

函数的表示方法：列表法、解析式法、图象法

一次函数图象的画法：两点法
1. 计算必过点 $(0, b)$ 和 $(-\frac{b}{k}, 0)$
2. 描点
3. 连线（从左）

函数图象

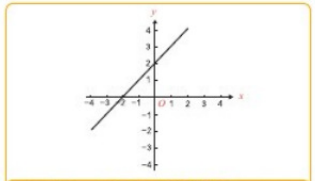
描点法画函数图象的一般步骤

第一步：列表（表中给出一些自变量的值及其对应的函数值）

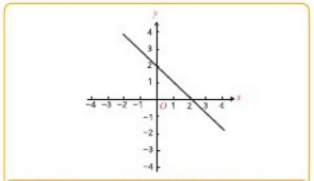
第二步：描点（在直角坐标系中，以自变量的值为横坐标，相应的函数值为纵坐标，描出表格中数值对应的各点）

第三步：连线（按照横坐标由小到大的顺序把所描出的各点用平滑曲线连接起来）

一次函数图象



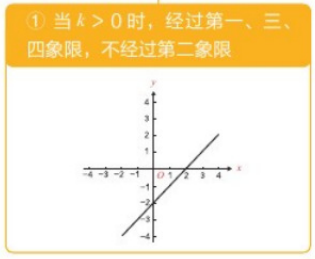
① 当 $k>0$ 时，经过第一、二、三象限，不经过第四象限



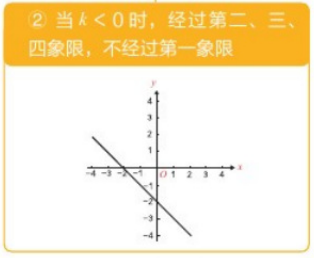
② 当 $k<0$ 时，经过第一、二、四象限，不经过第三象限

当 $b>0$ 时，直线与 y 轴交于原点的上方（即 y 轴的正半轴）

当 $b<0$ 时，直线与 y 轴交于原点的下方（即 y 轴的负半轴）



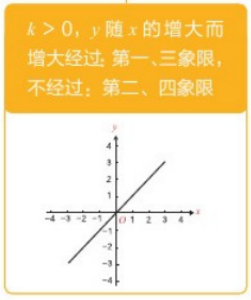
① 当 $k>0$ 时，经过第一、三、四象限，不经过第二象限



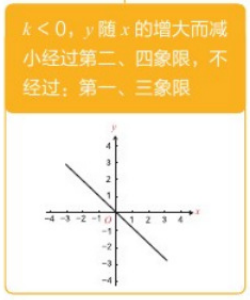
② 当 $k<0$ 时，经过第二、三、四象限，不经过第一象限

正比例函数图象

增减性（与 k 的符号相关）

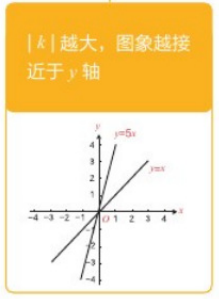


$k>0$，y 随 x 的增大而增大经过：第一、三象限，不经过：第二、四象限

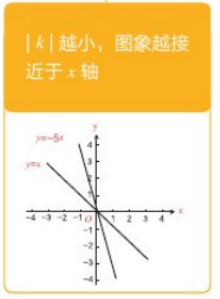


$k<0$，y 随 x 的增大而减小经过第二、四象限，不经过：第一、三象限

倾斜度（只与 $|k|$ 相关）



$|k|$ 越大，图象越接近于 y 轴



$|k|$ 越小，图象越接近于 x 轴

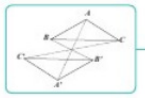
旋转

中心对称

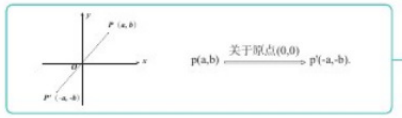
中心对称

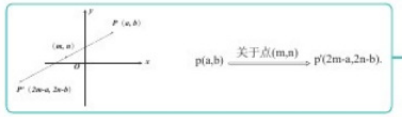


一个图形绕一点旋转 180° 后与另一图形重合 —— 定义



可用于确定对称中心 —— 性质：具有旋转的 4 条性质；对应点的连线过旋转中心；对应边互相平行（或共线）

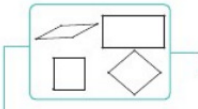




坐标系中的中心对称

中心对称图形

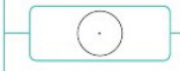
一个图形绕点旋转 180° 与自身重合 —— 定义



平行四边形



正 2n 边形（n≥2，正整数）



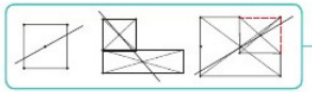
圆



其他组合图形

常见的中心对称图形

中心对称图形的对称中心就是该图形的中心



过对称中心的直线平分图形面积 —— 性质及应用

旋转对称图形

一个图形绕点旋转 α 度后可与自身重合（0<α<360） —— 定义



所有的中心对称图形

正 n 边形



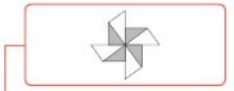
其他组合图形

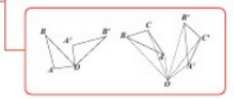
常见的旋转对称图形

旋转最小角度的整数倍

旋转的认识

定义：把平面图形绕平面内某点转动一个角度





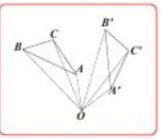
三要素：旋转中心、旋转方向、旋转角

性质：

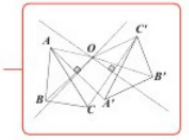
① 旋转前后图形全等 $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$

② 对应点到旋转中心的距离相等 $OA' = OA, OB' = OB, OC' = OC$

③ 对应点与旋转中心连线的夹角等于旋转角 $\angle AOA' = \angle BOB' = \angle COC'$



④ 对应点连线的中垂线过旋转中心 —— 可用于确定旋转中心



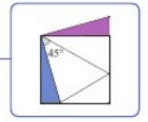
旋转的应用

旋转与全等模型

手拉手模型



半角模型

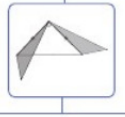


旋转的构造

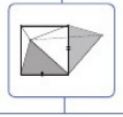
等边三角形



等腰直角三角形



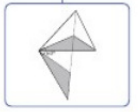
正方形



邻边等、对角互补型



费马点：任意锐角三角形内一点，到三顶点距离和最短——向外旋转 60°

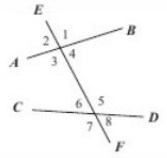


共顶点、等线段，考虑旋转

相交线与平行线

三线八角

- **同位角**：两条直线被第三条直线所截，位置相同的一对角（两个角分别在两条直线的相同一侧，并且在第三条直线的同旁）叫做同位角.
- **内错角**：两条直线被第三条直线所截，两个角都在两条直线之间，并且位置交错，（即分别在第三条直线的两旁），这样的一对角叫做内错角.
- **同旁内角**：两条直线被第三条直线所截，两个角都在两条直线之间，并且在第三条直线的同旁，这样的一对角叫做同旁内角.
- **例如**



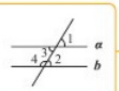
∠1 与∠5，∠2 与∠6，∠3 与∠7，∠4 与∠8 都是同位角.
∠3 与∠5，∠4 与∠6 都是内错角.
∠3 与∠6，∠4 与∠5 都是同旁内角.

平行线的判定

- 同位角相等，两直线平行；
- 内错角相等，两直线平行；
- 同旁内角互补，两直线平行.

若∠1=∠2，则 $a \parallel b$；
若∠2=∠3，则 $a \parallel b$；
若∠3+∠4=180°，则 $a \parallel b$.

例如：

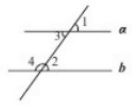


平行线的性质

- 两直线平行，同位角相等；
- 两直线平行，内错角相等；
- 两直线平行，同旁内角互补.

若 $a \parallel b$，则∠1=∠2；
若 $a \parallel b$，则∠2=∠3；
若 $a \parallel b$，则∠3+∠4=180°.

例如：



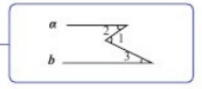
平行线

- **定义**：在同一平面内，永不相交的两条直线称为平行线. 用“//”表示.
- **例如**：$a \parallel b$，$AB \parallel CD$ 等.
- **定义**：在同一平面内，不重合的两条直线的位置关系只有两种：⑴相交；⑵平行.
- **两条直线的位置关系**：
  - ①有且只有一个公共点，两直线相交；
  - ②无公共点，则两直线平行；
  - ③两个或两个以上公共点，则两直线重合（因为两点确定一条直线）.

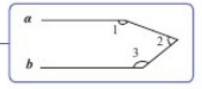
  注意：判断同一平面内两直线的位置关系时，可以根据它们的公共点的个数来确定
- **注意**：当我们得知在同一平面内两直线不相交时，就可以肯定它们平行；反过来也一样（这里，我们把重合的两直线看成一条直线）
- **平行公理**：经过直线外一点，有且只有一条直线与这条直线平行.
- **推论**：如果两条直线都与第三条直线平行，那么这两条直线也相互平行.

平行线的基本模型

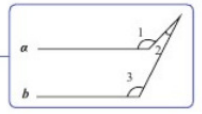
- **猪蹄模型**：若 $a \parallel b$，则∠1=∠2+∠3；



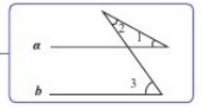
- **铅笔头模型**：若 $a \parallel b$，则∠1+∠2+∠3=360°；



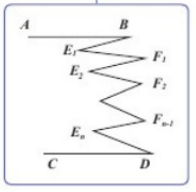
- **靴子模型**：若 $a \parallel b$，则∠1=∠2+∠3；



- **尖尖角模型**：若 $a \parallel b$，则∠3=∠1+∠2；



- **锯齿模型**：若 $AB \parallel CD$，则 $\angle E_1+\angle E_2+\cdots\angle E_n=\angle B+\angle F_1+\angle F_2+\cdots\angle F_{n-1}+\angle D$.



图形的相似

比例的认识

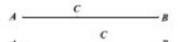
比例性质

1. 基本性质：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow ad=bc(bd\neq 0)$
2. 反比性质：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{b}{a}=\frac{d}{c}(abcd\neq 0)$
3. 更比性质：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{a}{c}=\frac{b}{d}\ \frac{d}{b}=\frac{c}{a}(abcd\neq 0)$
4. 合比性质：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}(bd\neq 0)$
5. 分比性质：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}(bd\neq 0)$
6. 合分比性质：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}(c\neq d,a\neq d且bd\neq 0)$
7. 等比性质：$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\cdots=\frac{a_k}{b_k}\Rightarrow\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_k}{b_1+b_2+b_3+\cdots+b_k}=\frac{a_1}{b_1}$

（其中 k 为正整数，且$b_1b_2b_3\cdots b_k\neq 0$，$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_k\neq 0$）

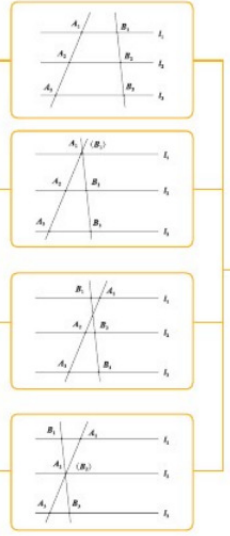
比例线段

- 成比例线段：线段 a、b、c、d 满足$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$或 $a:b=c:d$ ——注意顺序
- 比例中项：若$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$，则称 b 是 a，c 的比例中项 ——比例中项可正可负
- 黄金分割：线段的黄金分割点：$\frac{短}{长}=\frac{长}{全}=k$



黄金分割比：$k=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ——线段有 2 个黄金分割点

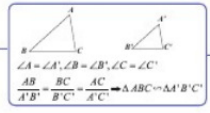
平行线分线段成比例



$l_1 // l_2 // l_3 \Rightarrow \frac{A_1A_2}{A_2A_3}=\frac{B_1B_2}{B_2B_3}$

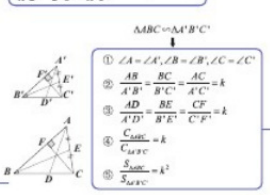
相似三角形的认识

定义



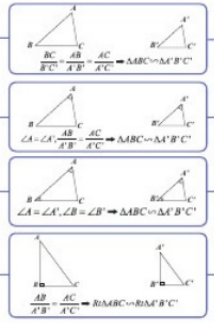
对应角相等、对应边成比例的三角形叫相似三角形，对应边的比值叫相似比 .

性质



1. 对应角相等
2. 对应边成比例
3. 对应高、对应中线、对应角平分线之比等于相似比
4. 周长比等于相似比
5. 面积比等于相似比的平方

判定



1. 三边对应成比例
2. 两组边对应成比例且夹角相等
3. 有两组角对应相等
4. 直角三角形中，一组直角边和斜边对应成比例

位似

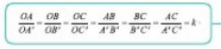
定义





对应顶点的连线相交于一点且对应边互相平行或共线的两个相似图形叫做位似图形，交点叫做位似中心，相似比叫做位似比.

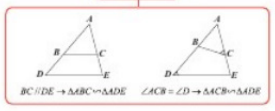
性质



对应点到位似中心的距离之比等于位似比.

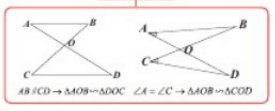
相似常见模型

A 字型



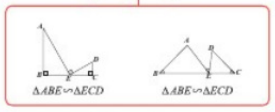
$BC//DE\rightarrow\triangle ABC\backsim\triangle ADE$　$\angle ACB=\angle D\rightarrow\triangle ACB\backsim\triangle ADE$

8 字型



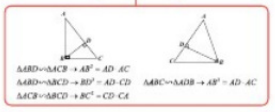
$AB//CD\rightarrow\triangle AOB\backsim\triangle DOC$　$\angle A=\angle C\rightarrow\triangle AOB\backsim\triangle COD$

K 字型



$\triangle ABE\backsim\triangle ECD$　$\triangle ABE\backsim\triangle ECD$

子母型



$\triangle ABD\backsim\triangle ACB\rightarrow AB^2=AD\cdot AC$

$\triangle ABD\backsim\triangle BCD\rightarrow BD^2=AD\cdot CD$

$\triangle ACB\backsim\triangle BCD\rightarrow BC^2=CD\cdot CA$

$\triangle ABC\backsim\triangle ADB\rightarrow AB^2=AD\cdot AC$

特殊四边形

常见辅助线

- 倍长中线构造平行四边形
- 取中点构造中位线，斜边中线
- 利用对称性，连对角线

数学思想与综合应用

- 转化思想
  - 面积问题
  - 线段求和
- 方程思想
- 分类讨论
- 最值问题

平行四边形

- 定义：两组对边分别平行的四边形
- 性质
  - **1. 边**：平行四边形的对边平行且相等
  - **2. 角**：平行四边形的对角相等
  - **3. 对角线**：平行四边形的对角线互相平分
  - 4. 平行四边形是中心对称图形，对称中心是两条对角线的交点
- 判定
  - 边
    - **1. 定义**：两组对边分别平行的四边形是平行四边形
    - 2. 一组对边平行且相等的四边形是平行四边形
    - 3. 两组对边分别相等的四边形是平行四边形
  - 角
    - 4. 两组对角分别相等的四边形是平行四边形
  - 对角线
    - 5. 对角线互相平分的四边形是平行四边形

三角形的中位线

- **定义**：连接三角形两边中点的线段叫做三角形的中位线
- **定理**：三角形的中位线平行且等于第三边的一半

矩形

- 性质
  - 矩形是特殊的平行四边形，它具有平行四边形的所有性质
  - **边**：对边平行且相等
  - **角**：四个角都是直角
  - **对角线**：对角线互相平分且相等
  - **推论**：直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半
  - **对称性**：矩形是中心对称图形，也是轴对称图形
- 判定
  - **1. 定义**：有一个角是直角的平行四边形是矩形
  - 2. 对角线相等的平行四边形是矩形
  - 3. 有三个角是直角的四边形是矩形

菱形

- 性质
  - 菱形是特殊的平行四边形，它具有平行四边形的所有性质
  - 边：对边平行且四边相等
  - 角：邻角互补，对角相等
  - 对角线：对角线互相垂直平分且每条对角线平分一组对角
  - 对称性：菱形是中心对称图形，也是轴对称图形
- 判定
  - **1. 定义**：一组邻边相等的平行四边形是菱形
  - 2. 对角线互相垂直的平行四边形是菱形
  - 3. 四边相等的四边形是菱形
- 面积
  - 菱形的面积等于底乘以高
  - 菱形的面积等于对角线乘积的一半
  - $S_{菱形\,ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD$

正方形

- 定义：有一组邻边相等，并且有一个角是直角的平行四边形叫做正方形
- 性质
  - 正方形是特殊的平行四边形，具有平行四边形的性质
  - 边：四条边都相等且对边平行
  - 角：四个角都是直角
  - 对角线：两条对角线互相垂直平分且相等，每条对角线平分一组对角
  - 对称性：正方形是中心对称图形，也是轴对称图形
- 判定
  - **1. 定义**：有一组邻边相等，并且有一个角是直角的平行四边形叫做正方形
  - 2. 有一组邻边相等的矩形是正方形
  - 3. 有一个角是直角的菱形是正方形
  - 4. 对角线互相垂直的矩形是正方形
  - 5. 对角线相等的菱形是正方形

数据的收集、整理与描述

统计学基本概念

- 总体：所有考察对象的全体叫做总体
- 个体：总体中每一个考察对象叫做个体
- 样本：从总体中所抽取的一部分个体叫做总体的一个样本
- 样本容量：样本中个体的数目叫做样本容量
- 样本平均数：样本中所有个体的平均数叫做样本平均数
- 总体平均数：总体中所有个体的平均数叫做总体平均数，在统计中，通常用样本平均数估计总体平均数

数据的波动

极差

- 概念：一组数据中的最大数据与最小数据的差叫做这组数据的极差
- 意义：能够反映数据的变化范围，是最简单的一种度量数据波动情况的量，极差越大，波动越大。

方差

概念：在一组数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中，各数据与它们的平均数 x 的差的平方的平均数，叫做这组数据的方差。通常用“s^2”表示，即：

$$s^2=\frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2]$$

方差的计算

1. 基本公式：$s^2=\frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2]$

2. 简化计算公式：

$$s^2=\frac{1}{n}[(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)-n\bar{x}^2]$$

$$s^2=\frac{1}{n}(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)-\bar{x}^2$$

此公式的记忆方法是：方差等于原数据平方的平均数减去平均数的平方

3. 新数据法：原数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的方差与新数据 $x'_1=x_1-a$，$x'_2=x_2-a$，…，$x'_n=x_n-a$ 的方差相等，也就是说，根据方差的基本公式，求得 $x'_1,x'_2,\cdots,x'_n$ 的方差就等于原数据的方差。

标准差

方差的算数平方根叫做这组数据的标准差，用“s”表示，即 $s=\sqrt{s^2}=\sqrt{\frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2]}$

数据的描述方法

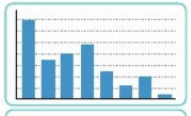
描述数据的两种方法

统计表和统计图

统计表的特点

将要统计的数据填入相应的表格内，统计表中的数据比较详细，可以清楚地反映各个量的真实情况，但信息表达不够直观

统计图的特点



条形图的特点：用一个单位长度表示一定的数量；用长方形的高表示数据的数量；能清楚地表示各个项目的具体数目，易于比较数据间的差别



折线图的特点：用一个单位长度表示一定的数量；用折线起伏表示数据的增减变化；能清楚地反映事物的变化趋势



扇形图的特点：用整个圆表示总体，用各个扇形表示每一部分；能清楚地表示出各部分在总体中所占的百分比



直方图：频数分布直方图简称直方图，它是条形图的一种

统计图主要有“条形图”“扇形图”“折线图”等，统计图的最大优点是能将表格中的数据所呈现出来的信息直观化

数据的代表

平均数

一般地，如果有 n 个数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 那么，$\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$ 叫做这个 n 个数的平均数，$\bar{x}$ 读作“x 拔”

加权平均数

如果 n 个数中，x_1 出现 f_1 次，x_2 出现 f_2 次，…，x_k 出现 f_k 次（这里 $f_1+f_2+\cdots+f_k=n$），那么，根据平均数的定义，这 n 个数的平均数可以表示为 $\bar{x}=\frac{x_1f_1+x_2f_2+\cdots+x_kf_k}{n}$ 这样求得的平均数 $\bar{x}$ 叫做加权平均数，其中 $f_1,f_2,\cdots,f_k$ 叫做权

算术平均数与加权平均数的区别与联系

- 联系：都是平均数，算术平均数是加权平均数的一种特殊形式（它特殊在各项的权相等，均为 1）
- 区别：算术平均数就是简单的把所有数加起来然后除以个数。而加权平均数是指各个数所占的比重不同，按照相应的比例把所有数乘以权值再相加，最后除以总权值。

平均数的计算方法

- 定义法：当所给数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 比较分散时，一般选用定义公式
- 加权平均数法：当所给数据重复出现时，一般选用加权平均数公式
- 新数据法：新数据法：当所给数据都在某一常数 a 的上下波动时，一般选用简化公式：$\bar{x}=\bar{x}'+a$. 其中，常数 a 通常取接近这组数据平均数的较“整”的数，$x'_1=x_1-a$，$x'_2=x_2-a$，…，$x_n=x_n-a$，$\bar{x}'=\frac{1}{n}(x'_1+x'_2+\cdots+x'_n)$ 是新数据的平均数

众数

在一组数据中，出现次数最多的数据叫做这组数据的众数

中位数

将一组数据按大小依次排列，把处在最中间位置的一个数据（或最中间两个数据的平均数）叫做这组数据的中位数

实数

平方根

定义： 如果一个数的平方等于 a，那么这个数叫做 a 的平方根。也就是说，若 $x^2=a$，则 x 就叫做 a 的平方根．例（±3）$^2=9$，所以 9 的平方根是 ±3

表示： 一个非负数 a 的平方根可用符号表示为“$\pm\sqrt{a}$”

总结： 一个正数有两个平方根，且互为相反数；0 的平方根是 0；负数没有平方根

计算： 求一个数的平方根的运算，叫做开平方（开方），开方运算和平方运算互为逆运算

算术平方根

定义： 如果一个正数 x 的平方等于 a，即 $x^2=a$，那么这个正数 x 叫做 a 的算术平方根．**例：** 9 的算术平方根是 3. 规定 0 的算术平方根是 0

表示： 一个非负数 a 的算术平方根可用符号表示为“$\sqrt{a}$”．

总结： 一个正数只有一个算术平方根；0 的算术平方根是 0；负数没有算术平方根

双重非负性： 在式子$\sqrt{a}$中，$a\geqslant0$ 且 $\sqrt{a}\geqslant0$

例： 式子$\sqrt{x-1}$有意义 $\Rightarrow x-1\geqslant0$，且$\sqrt{x-1}\geqslant0$

立方根

定义： 如果一个数的立方等于 a，那么这个数叫做 a 的立方根．也就是说，若 $x^3=a$，则 x 就叫做 a 的立方根．**例**（-3）$^3=-27$，所以 -27 的立方根是 -3

表示： 一个数 a 的立方根可用符号表示为“$\sqrt[3]{a}$”，读作“三次根号 a”．

总结： 任何一个数都有立方根，且只有一个立方根．正数的立方根为正数，负数的立方根为负数，0 的立方根为 0

无理数

四类常见无理数：

1、圆周率 π；

2、开不尽的方根，如$\sqrt{6}$；

3、含有无理数的式子，如$\sqrt{5}-1$；

4、特殊形式的数，

如 0.1010010001...（每两个 1 之间 0 个数依次多 1）．

无限不循环小数叫无理数

实数的概念

有理数和无理数统称实数

与数轴的关系

实数与数轴上的点一一对应，即每一个实数都可以用数轴上的一个点来表示；反过来，数轴上的每一个点都表示一个实数

实数的分类

- 实数
  - 有理数
    - 整数
      - 正整数
      - 0
      - 负整数
    - 分数
      - 正分数
      - 负分数

  （有限小数或无限循环小数）
  - 无理数
    - 正无理数
    - 负无理数

  （无限不循环小数）

化简

① $(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant0)$　② $\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a & a>0\\0 & a=0\\-a & a<0\end{cases}$

③ $\sqrt[3]{-a}=-\sqrt[3]{a}$；$\sqrt[3]{a^3}=a$；$\sqrt[3]{(-a)^3}=-a$

注：①去绝对值时，注意里面的正负

②开算术平方根时，注意里面的正负，算术平方根是正数或者 0

③遇到不能直接开平方的，要分类讨论

三角形

三角形的认识

三角形的定义及分类

- 三角形的定义：由不在同一条直线上的三条线段首尾顺次相接所组成的平面图形叫做三角形.
- 表示法及读法
- 三角形具有稳定性
- 三角形的分类
  - 按角分类：直角三角形；斜三角形（锐角三角形、钝角三角形）
  - 按边分类：不等边三角形；等腰三角形（有两条边相等的三角形；三条边都相等的三角形（即等边三角形））

三角形的角平分线、中线、高线

- 三角形的角平分线：三角形的一个角的平分线与这个角的对边相交，这个角的顶点和交点之间的线段叫做三角形的角平分线.
- 三角形的中线：在三角形中，连接一个顶点和它的对边中点的线段叫做三角形的中线.
- 三角形的高线：从三角形的一个顶点向它的对边画垂线，顶点和垂足间的线段叫做三角形的高.

三角形的边和角

三边关系定理

- 三角形三边关系定理：三角形任意两边之和大于第三边.
- 三角形三边关系定理的推论：三角形任意两边之差小于第三边.
- 三角形第三边的范围

三角形的角

- 三角形内角和定理：三角形三个内角和等于 180°.
- 三角形内角和定理及推论
  - 推论：直角三角形的两个锐角互余.
- 三角形外角的性质及推论
  - 三角形外角的性质：三角形的一个外角等于和它不相邻的两个内角的和.
  - 推论：三角形的一个外角大于任意一个和它不相邻的内角.
- 三角形的外角和等于 360°

全等三角形的认识

全等三角形的概念和性质

- 全等形：能够完全重合的两个图形叫做全等形
- 全等三角形：两个三角形是全等形，就说它们是全等三角形
- 对应顶点：两个全等三角形，经过运动重合，互相重合的顶点为对应顶点
- 对应角：两个全等三角形，经过运动重合，互相重合的角为对应角
- 对应边：两个全等三角形，经过运动重合，互相重合的边为对应边
- 全等三角形的性质
  1. 全等三角形的对应边相等；
  2. 全等三角形的对应角相等；
  3. 全等三角形的周长相等，面积相等；

全等三角形的判定

- 如果两个三角形的三条边分别对应相等，那么这两个三角形全等，简记为 SSS
- 如果两个三角形的两边及这两边的夹角对应相等，那么这两个三角形全等，简记为 SAS
- 如果两个三角形的两个角及这两个角的夹边对应相等，那么这两个三角形全等，简记为 ASA
- 如果两个三角形的两个角及其中的一个角所对的边对应相等，那么这两个三角形全等，简记为 AAS
- 如果两个直角三角形的斜边及一条直角边分别对应相等，那么这两个直角三角形全等，简记为 HL

全等三角形的基本模型

- 平移型全等
- 对称型全等
- 旋转型全等

全等辅助线构造

- 倍长中线
- 截长补短
- 角平分线
  - 作垂线
  - 作等线
  - 延长线

全等三角形必考模型

- 手拉手模型
- 半角模型
- 一线三等角
- 婆罗摩笈多

等腰三角形

等腰三角形的定义

有两条边相等的三角形叫做等腰三角形.

等腰三角形的性质

- 等腰三角形的两底角相等，即等边对等角；
- “三线合一”，即顶角平分线、底边上的中线、底边上的高相互重合；

等腰三角形的判定

- 有两条边相等的三角形是等腰三角形；
- 有两个角相等的三角形是等腰三角形 .

等边三角形

- 等边三角形：三条边都相等的三角形叫做等边三角形.
- 等边三角形的性质：三边都相等，三个内角都相等，并且每一个角都等于 60° .
- 等边三角形的判定：
  1. 三条边都相等的三角形是等边三角形；
  2. 三个角都相等的三角形是等边三角形；
  2. 有一个角是 60° 的等腰三角形是等边三角形.

三角形的边角模型

- “8”字模型
- 飞镖模型
- 角平分线模型

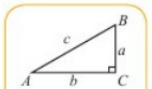
锐角三角函数

解直角三角形

概念

在直角三角形中，除直角外，一共有 5 个元素，即 3 条边和 2 个锐角，由直角三角形中除直角外的已知元素，求出所有未知元素的过程，叫做解直角三角形.

直角三角形的边角关系



【注】知道其中两个元素（至少有一条边），就可以求出其余三个未知元素.

- 三边之间的关系：$a^2+b^2=c^2$（勾股定理）
- 锐角之间的关系：$\angle A+\angle B=90°$
- 边角之间的关系：$\sin A=\frac{a}{c}$，$\cos A=\frac{b}{c}$，$\tan A=\frac{a}{b}$

四种基本类型与解法

已知两边

两直角边

由 $\tan A=\frac{a}{b}$，求 $\angle A$；$\angle B=90°-\angle A$，$c=\sqrt{a^2+b^2}$

斜边，一直角边（如 c，a）

由 $\sin A=\frac{a}{c}$，求 $\angle A$；$\angle B=90°-\angle A$，$b=\sqrt{c^2-a^2}$

已知一边一角

一直角边和一锐角

锐角，邻边（如 $\angle A$，b）

$\angle B=90°-\angle A$，$a=b\cdot\tan A$，$c=\frac{b}{\cos A}$

锐角，对边（如 $\angle A$，a）

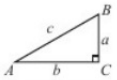
$\angle B=90°-\angle A$，$b=\frac{a}{\tan A}$，$c=\frac{a}{\sin A}$

斜边，锐角（如 c，$\angle A$）

$\angle B=90°-\angle A$，$a=c\cdot\sin A$，$b=c\cdot\cos A$

定义

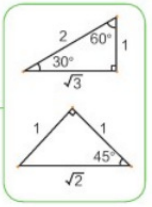
在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 所对的三角形的边分别为 a、b、c.



- 正弦：$\sin A=\frac{a}{c}$
- 余弦：$\cos A=\frac{b}{c}$
- 正切：$\tan A=\frac{a}{b}$

特殊角的三角函数值

30°	$\sin30°=\frac{1}{2}$	$\cos30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$；$\tan30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\sin45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$；$\tan45°=1$
60°	$\sin60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos60°=\frac{1}{2}$；$\tan60°=\sqrt{3}$



性质

同角三角函数关系

- $\sin^2A+\cos^2A=1$，如：$\sin^230°+\cos^230°=1$
- $\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}$，如：$\tan25°=\frac{\sin25°}{\cos25°}$
- $\cot A=\frac{1}{\tan A}$（沪教童鞋必会，其他童鞋了解）
- $\tan A\cdot\cot A=1$（沪教童鞋了解）

互为余角三角函数关系

若 $\angle A$、$\angle B$ 互为余角，则

- $\sin A=\cos(90°-A)=\cos B$，如 $\sin70°=\cos20°$
- $\cos A=\sin(90°-A)=\sin B$，如 $\cos10°=\sin80°$
- $\tan A\cdot\tan B=1$

增减性

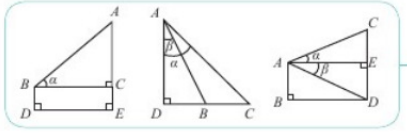
当角度在 0° ~ 90° 范围内变化时，

- 正弦值随角度增大（或减小）而增大（或减小）
- 余弦值随角度增大（或减小）而减小（或增大）
- 正切值随角度增大（或减小）而增大（或减小）

已知 $\angle A$，$\angle B$ 为锐角且 $\angle A>\angle B$，则 $\sin A>\sin B$，$\cos A<\cos B$，$\tan A>\tan B$. 该规律反过来也成立.

实际应用

常见基本图形



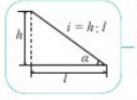
常见类型

仰角与俯角



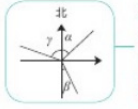
在视线与水平线所成的角中，视线在水平线上方的叫做仰角，在水平线下方的叫做俯角.

坡角与坡度



坡面的垂直高度 h 和水平宽度 l 的比叫做坡度（或叫做坡比），用字母表示为 $i=\frac{h}{l}$，坡面与水平面的夹角记作 α，叫做坡角，则 $i=\frac{h}{l}=\tan\alpha$. 坡度越大，坡面就越陡.

方向角（或方位角）



方向角一般是指以观测者的位置为中心，将正北或正南方向作为起始方向旋转到目标的方向线所成的角（一般指锐角），通常表达为北（南）偏东（西）XX 度.

常见技巧

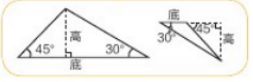
分类讨论

当直角不确定时

- 已知边 / 知角求三角函数值
- 已知三角函数值求边 / 求角

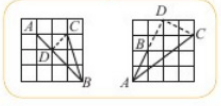
解斜三角形

作高，常从非特殊角的顶点作高，一般不破坏已知角或特殊角，构造直角三角形。



格点问题

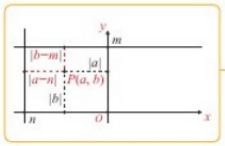
找直角三角形（垂线、平行线）或构造直角三角形



平面直角坐标系

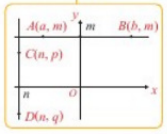
距离

点到直线



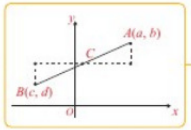
- 点 $P(a, b)$ 到 x 轴：$|b|$
- 点 $P(a, b)$ 到 y 轴：$|a|$
- 点 $P(a, b)$ 到直线 $y=m$：$|b-m|$
- 点 $P(a, b)$ 到直线 $x=n$：$|a-n|$

点到点

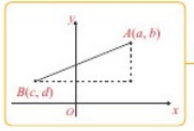


- 若 $A(a, m)$，$B(b, m)$，则 $AB=|a-b|$
- 若 $C(n, p)$，$D(n, q)$，则 $CD=|p-q|$

平行于坐标轴的直线上的两点



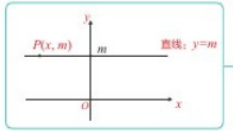
中点坐标公式：
若 $A(a, b)$，$B(c, d)$，
则 AB 的中点 C 的坐标为
$\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right)$



任意两点：若 $A(a, b)$，$B(c, d)$，则：
$AB=\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$

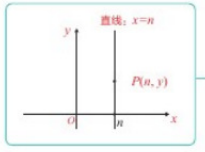
特殊直线

平行于 x 轴



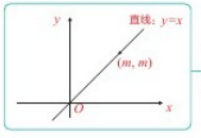
- 直线表示：$y=m$
- 点表示：(x, m)

平行于 y 轴



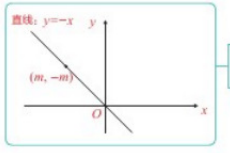
- 直线表示：$x=n$
- 点表示：(n, y)

一、三象限角平分线



- 直线表示：$y=x$
- 点表示：(x, y) 且 $x=y$

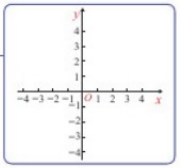
二、四象限角平分线



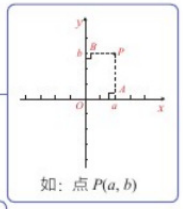
- 直线表示：$y=-x$
- 点表示：(x, y) 且 $x+y=0$

认识平面直角坐标系

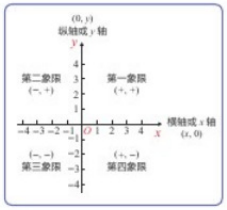
定义：由两条互相垂直且有公共原点的数轴组成



点坐标：用一组有序数对来表示，横前纵后

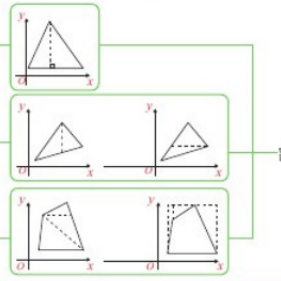


结构：4 个象限 +2 条坐标轴



平面直角坐标系的应用

面积问题



割补法、作铅垂高或水平底简化计算

找规律：周期型、螺旋型、摆动型、特殊图形找规律

坐标与图形变化

对称

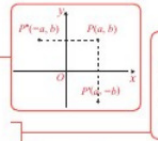
点关于点对称

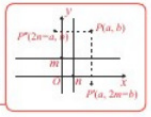
- 点 $P(a, b)$ 关于原点 $(0, 0)$ 的对称点是 $(-a, -b)$
- 点 $P(a, b)$ 关于点 (m, n) 的对称点是 $(2m-a, 2n-b)$

用中点坐标公式推导

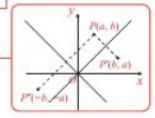
点关于线对称

- 点 $P(a, b)$ 关于 x 轴：$(a, -b)$
- 点 $P(a, b)$ 关于 y 轴：$(-a, b)$





- 点 $P(a, b)$ 关于直线 $y=m$：$(a, 2m-b)$
- 点 $P(a, b)$ 关于直线 $x=n$：$(2n-a, b)$
- 点 $P(a, b)$ 关于直线 $y=x$：(b, a)
- 点 $P(a, b)$ 关于直线 $y=-x$：$(-b, -a)$



平移

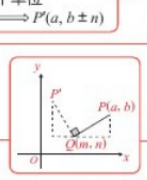
左右平移：
向右（左）平移 m 个单位
$P(a, b) \Longrightarrow P'(a \pm m, b)$

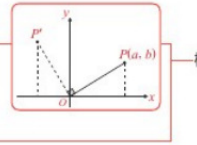
上下平移：
向上（下）平移 n 个单位
$P(a, b) \Longrightarrow P'(a, b \pm n)$

左减右加横坐标；上加下减纵坐标

旋转

线段绕点旋转 90°





构造一线三垂直

一元二次方程

一元二次方程

概念

等号两边是整式，含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 2 的方程叫做一元二次方程

- （1）一元二次方程必须是一个整式方程
- （2）只含有一个未知数
- （3）未知数的最高次数是 2
- （4）二次项系数不能等于 0

一般形式

一般形式 $:ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$；它的特征是：等式左边是一个关于未知数 x 的二次三项式，等式右边是零，其中 ax^2 叫做二次项，a 叫做二次项系数；bx 叫做一次项，b 叫做一次项系数；c 叫做常数项

- （1）二次项、二次项系数、一次项、一次项系数，常数项都包括它前面的符号
- （2）要准确找出一个一元二次方程的二次项系数、一次项系数和常数项，必须把它先化为一般形式
- （3）形如 $ax^2+bx+c=0$ 不一定是一元二次方程，当且仅当 $a\neq 0$ 时是一元二次方程

一元二次方程的解法

直接开平方法

利用平方根的定义直接开平方求一元二次方程的解的方法叫做直接开平方法

三种类型

- $x^2=a(a\geqslant 0)$ 的解是 $x=\pm\sqrt{a}$
- $(x+m)^2=n(n\geqslant 0)$ 的解是 $x=\pm\sqrt{n}-m$
- $(mx+n)^2=c(m\neq 0$，且 $c\geqslant 0))$ 的解是 $x=\dfrac{\pm\sqrt{c}-n}{m}$

配方法

配方法的理论根据是完全平方公式 $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$，把公式中的 a 看做未知数 x，并用 x 代替，则有 $x^2\pm 2bx+b^2=(x\pm b)^2$

用配方法解二次项系数为 1 的一元二次方程的步骤

1. (1) 把一元二次方程化成一般形式
2. (2) 在方程的左边加上一次项系数绝对值的一半的平方，再减去这个数
3. (3) 把原方程变为 $(x+m)^2=n$ 的形式
4. (4) 若 $n\geqslant 0$，用直接开平方法求出 x 的值，若 $n<0$，原方程无解

用配方法解二次项系数不是 1 的一元二次方程的步骤

1. (1) 把一元二次方程化成一般形式
2. (2) 先把常数项移到等号右边，再把二次项的系数化为 1；方程的左、右两边同时除以二次项的系数
3. (3) 在方程的左、右两边加上一次项系数的一半的平方把原方程化为 $(x+m)^2=n$ 的形式
4. (4) 若 $n\geqslant 0$，用直接开平方法或因式分解法解变形后的方程

公式法

公式法是用求根公式解一元二次方程的解的方法，它是解一元二次方程的一般方法

用求根公式法解一元二次方程的步骤

1. (1) 把方程化为 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的形式，确定 a,b,c 的值（注意符号）
2. (2) 求出 $\triangle=b^2-4ac$ 的值并判断方程根的情况
3. (3) 若 $\triangle=b^2-4ac\geqslant 0$，则把 a,b 及 b^2-4ac 的值代入求根公式，求出方程的根；若 $\triangle<0$ 时，一元二次方程没有实数根

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的求根公式

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\ (b^2-4ac\geqslant 0)$$

因式分解法

因式分解法的理论依据：如果两个因式的积等于 0，那么这两个方程中至少有一个等于 0，即若 $pq=0$ 时，则 $p=0$ 或 $q=0$

因式分解法解一元二次方程的一般步骤

1. (1) 将方程的右边化为 0（即化为一般式）
2. (2) 将方程左边分解成两个一次因式的乘积
3. (3) 令每个因式分别为 0，得两个一元一次方程
4. (4) 解这两个一元一次方程，它们的解就是原方程的解

关键点

- (1) 要将方程右边化为 0（即化为一般式）
- (2) 熟练掌握多项式因式分解的方法，常用方法有：提公式法，公式法（平方差公式，完全平方公式）、十字相乘法

一元二次方程根的判别式

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 中，b^2-4ac 叫做一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 根的判别式，通常用“$\triangle$”来表示，即 $\triangle=b^2-4ac$

- (1) 当 $\triangle>0$ 时，一元二次方程有 2 个不相等的实数根
- (2) $\triangle=0$ 时，一元二次方程有 2 个相同的实数根
- (3) 当 $\triangle<0$ 时，一元二次方程没有实数根

利用根的判别式判定一元二次方程根的情况的步骤

1. ①把所有一元二次方程化为一般形式
2. ②确定 a,b,c 的值
3. ③计算 b^2-4ac 的值
4. ④根据 b^2-4ac 的符号判定方程根的情况

根的判别式的逆用

在方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 中

- (1) 方程有两个不相等的实数根 $\rightarrow b^2-4ac>0$
- (2) 方程有两个相等的实数根 $\rightarrow b^2-4ac=0$
- (3) 方程没有实数根 $\rightarrow b^2-4ac<0$

注意： 逆用一元二次方程根的判别式求未知数的值或取值范围，但不能忽略二次项系数不为 0 这一条件

一元二次方程根与系数的关系（韦达定理）

如果方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的两个实数根是 x_1，x_2，那么 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$，$x_1x_2=\dfrac{c}{a}$

一元二次方程的应用

数字问题 — 几何问题 — 增长率（降低率） — 经济问题 — 应用题题型类别

一元二次方程的解

使方程左、右两边相等的未知数的值叫做方程的解，一元二次方程的解也叫一元二次方程的根

一元一次不等式（组）

知识清单

不等式

- 定义：用符号“>”、“<”、“≥”、“≤”、“≠”连接，表示不等关系的式子
- 性质：
  1. 不等式的两边都加（或减）同一个整式，不等号的方向不变；
     例：若 $a>b$，则 $a\pm c>b\pm c$；若 $a<b$，则 $a\pm c<b\pm c$；
  2. 不等式的两边都乘（或除以）同一个正数，不等号的方向不变；
     例：若 $a>b$，$c>0$，则 $ac>bc$（或 $a/c>b/c$）；若 $a<b$，$c>0$，则 $ac<bc$（或 $a/c<b/c$）；
  3. 不等式的两边都乘（或除以）同一个负数，不等号的方向改变；
     例：若 $a>b$，$c<0$，则 $ac<bc$（或 $a/c<b/c$）；若 $a<b$，$c<0$，则 $ac>bc$（或 $a/c>b/c$）；
  4. 互逆性：若 $a>b$，则 $b<a$；若 $b<a$，则 $a>b$
  5. 传递性：若 $a>b$，$b>c$，则 $a>c$

一元一次不等式

- 定义：不等式的左右两边都是整式，只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 1，这样的不等式叫做一元一次不等式.
  例：$6+3x>30$
- 解集：使不等式成立的未知数的值，叫做不等式的解；一个含有未知数的不等式的所有解，组成这个不等式的解集
- 解法：去分母→去括号→移项→合并同类项→系数化为 1.
- 解集的表示：
  1. $x>a$
  2. $x\geqslant a$
  3. $x<a$
  4. $x\leqslant a$

一元一次不等式组

- 定义：关于一个未知数的几个一元一次不等式合在一起，就组成一个一元一次不等式组.
- 解集：各个不等式的解集的公共部分
- 解法：
  1. 求出这个不等式组中各个不等式的解集；
  2. 利用数轴求出这些不等式的解集的公共部分，即求出这个不等式组的解集.
- 解集的表示：
  1. $x>a$
  2. $x<b$
  3. $b<x<a$
  4. 无解

口诀：同大取大
同大取小
大小交叉中间找
大大小小无解了

考题清单

- 考题一：概念
  - 1. 不等式：看符号“>、≥、<、≤、≠”——类比等式
  - 2. 一元一次不等式
  - 3. 一元一次不等式组
  - 2、3 类比一元一次方程、二元一次方程组
- 考题二：不等式性质——同加减、号不变；同乘除，正不变、负相反；同乘 0，变等式
- 考题三：解不等式（组）
  - 不等式：系数化 1 看正负，正不变、负相反
  - 不等式组解集的确定：数轴表示或口诀
- 考题四：含参不等式（组）
  - ①系数含参：根据解集定系数的正负
  - ②系数不含参：解不等式（组）、数轴表示定范围
  - 注意临界值是否可取
- 考题五：一元一次不等式与一次函数的关系
  - ①基本思想：数形结合，把不等号两端的式子转化为一次函数
  - ②方法步骤：定函数图象的交点（即等值点），上大下小定自变量 x 的范围
  - 对于不能直接看出的函数，可考虑通过移项变形、图象平移、对称来转化
- 考题六：不等式的实际应用

一元一次方程

等式

- 定义：用等号来表示相等关系的式子，叫做等式。如 :$2a=3$，$x=1$ 等
- 分类
  - 恒等式：无论用什么数值代替等式中的字母，等式总能成立。如 :$x=x$，$2=2$ 等
  - 条件等式：只能用某些数值代替等式中的字母，等式才能成立。如 :$x=1$，$2a=b$ 等
  - 矛盾等式：无论用什么数值代替等式中的字母，等式都不能成立。如 :$3=1$，$0x=3$ 等
- 基本性质
  - 基本性质 1：等式两边都加上（或减去）同一个数（或式子），所得结果仍是等式。即：若 $a=b$，则 $a \pm c = b \pm c$
  - 基本性质 2：等式两边都乘以（或除以）同一个数（除数不能是 0），结果仍是等式。即：若 $a=b$，则 $ac=bc$；若 $a=b$ 且 $c \neq 0$，则 $\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$

注： 在等式变形中，以下两个性质也经常用到：
对称性： 如果 $a=b$，那么 $b=a$；
传递性： 如果 $a=b$，$b=c$，那么 $a=c$

方程

- 定义：含有未知数的等式。即：①方程中必须含有未知数；②方程必须是等式
- 方程的解：使方程左、右两边相等的未知数的值，叫做方程的解
  - **注：** 若已知方程的解，应进行代入。即，逢解必代
- 解方程：求方程的解的过程
- 已知数与未知数：
  - 方程中的已知数：一般是具体的数值。
  - 方程中的未知数：是指要求的数，未知数通常用 x，y，z 等字母表示。
  - 如：关于 x，y 的方程 $ax-2by=c$ 中，a，$-2b$，c 是已知数，x，y 是未知数

一元一次方程的应用

- 解应用题的步骤：1. 审 → 2. 设 → 3. 找 → 4. 列 → 5. 解 → 6. 验 → 7. 答
- 设元的基本方法
  1. 直接设元
  2. 间接设元
- 常见的数量关系
  - 打折销售类问题
    1. 售价 = 标价（没有折扣）；标价 × 折扣（有折扣）
    2. 利润 = 售价 − 进价 = 进价 × 利润率
    3. 利润率 $=\frac{\text{利润}}{\text{进价}} \times 100\% = \frac{\text{售价}-\text{进价}}{\text{进价}} \times 100\%$
    4. $\frac{\text{折扣}}{10}=\frac{\text{售价}}{\text{标价}}$（售价 = 标价 × $\frac{\text{折扣}}{10}$）
  - 工程问题
    1. 全部工作量 = 各部分工作量之和 =1
    2. 工作效率 × 工作时间 = 工作总量
  - 行程问题
    1. 基本公式：速度 × 时间 = 路程；总路程 = 平均速度 × 总时间
    2. 相遇追及问题：相遇路程 = 甲走的路程 + 乙走的路程 = 速度和 × 相遇时间；追及路程 = 甲走的路程 − 乙走的路程 = 速度差 × 追及时间
    3. 流水行船问题：顺水速度 = 船速 + 水速；逆水速度 = 船速 − 水速

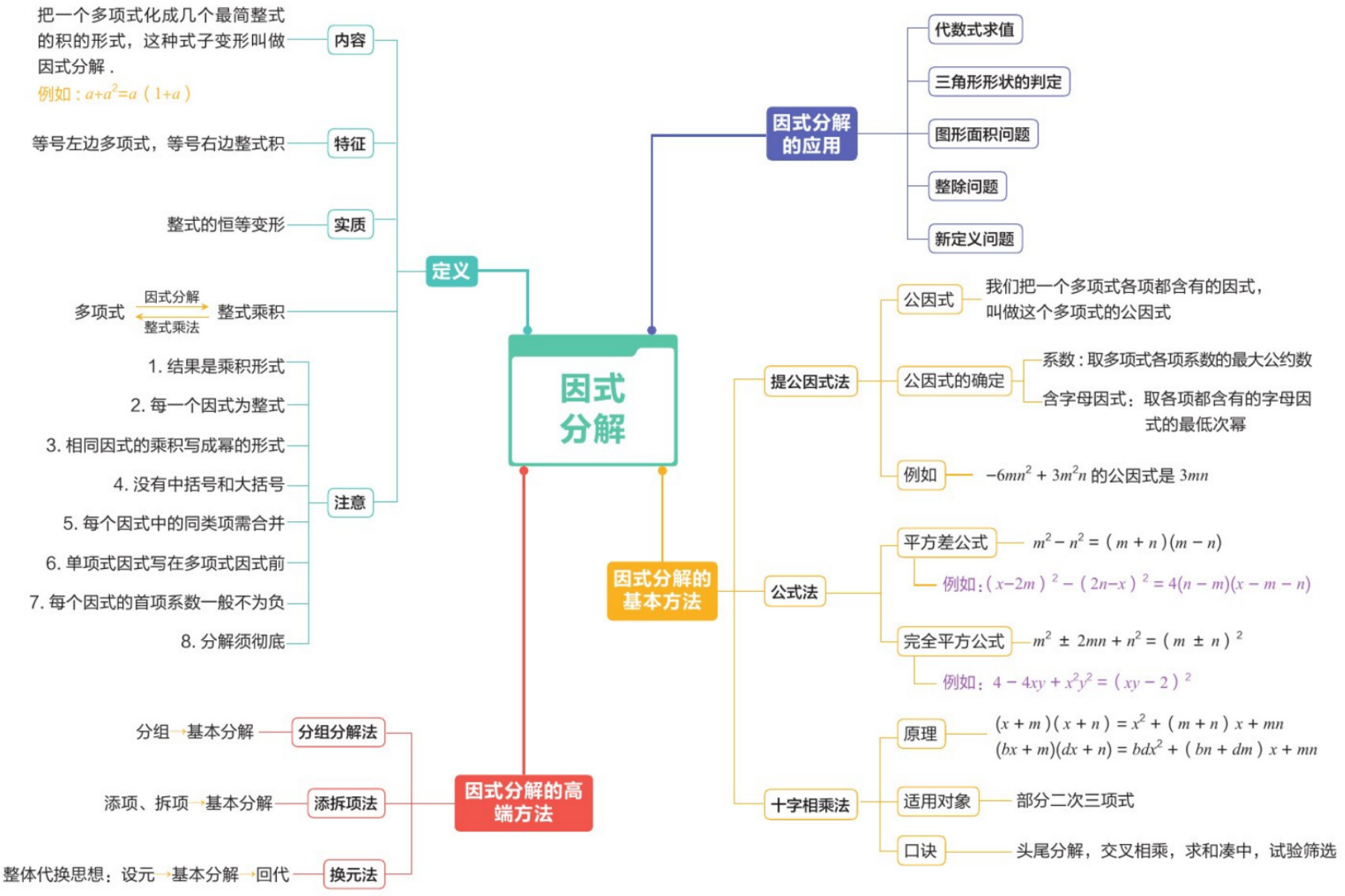
一元一次方程

- 定义：只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 1，且系数不等于 0 的整式方程叫做一元一次方程。这里的“元”是指未知数，“次”是指含未知数的项的最高次数
- 最简形式：方程 $ax=b$（$a \neq 0$，a，b 为常数）的形式叫一元一次方程的最简形式
- 标准形式：方程 $ax+b=0$（$a \neq 0$，a，b 是常数）的形式叫一元一次方程的标准形式
- 判断一元一次方程的方法
  1. 判断是否为分式方程、绝对值方程等
  2. 将方程化为最简形式
  3. 化简后，方程只含有一个未知数
  4. 化简后，未知数的次数是 1 次
  5. 化简后，未知数的系数不为 0
- 解一元一次方程的一般步骤
  1. 去分母
  2. 去括号
  3. 移项
  4. 合并同类项
  5. 未知数的系数化为 1

注： 易错点 1：去括号：括号前是负号时，括号里各项均要变号
易错点 2：去分母：不要漏乘不含分母的项
易错点 3：移项不要忘记变符号

含参方程

- 定义：除了未知数还含有字母常数的方程，我们通常称为“含参方程”
- 方程 $ax=b$ 的解需要根据 a，b 的具体取值分类讨论：
  1. 当 $a \neq 0$ 时，方程有唯一解 $x=\frac{b}{a}$；
  2. 当 $a=0$ 且 $b=0$ 时，方程有无数个解，解是任意数；
  3. 当 $a=0$ 且 $b \neq 0$ 时，方程无解


因式分解
定义
内容
把一个多项式化成几个最简整式的积的形式，这种式子变形叫做因式分解．
例如：$a+a^2=a(1+a)$
特征
等号左边多项式，等号右边整式积
实质
整式的恒等变形
多项式 因式分解 整式乘积 整式乘法
注意
1. 结果是乘积形式
2. 每一个因式为整式
3. 相同因式的乘积写成幂的形式
4. 没有中括号和大括号
5. 每个因式中的同类项需合并
6. 单项式因式写在多项式因式前
7. 每个因式的首项系数一般不为负
8. 分解须彻底
因式分解的应用
代数式求值
三角形形状的判定
图形面积问题
整除问题
新定义问题
因式分解的基本方法
提公因式法
公因式
我们把一个多项式各项都含有的因式，叫做这个多项式的公因式
公因式的确定
系数：取多项式各项系数的最大公约数
含字母因式：取各项都含有的字母因式的最低次幂
例如
$-6mn^2+3m^2n$ 的公因式是 $3mn$
公式法
平方差公式
$m^2-n^2=(m+n)(m-n)$
例如：$(x-2m)^2-(2n-x)^2=4(n-m)(x-m-n)$
完全平方公式
$m^2\pm2mn+n^2=(m\pm n)^2$
例如：$4-4xy+x^2y^2=(xy-2)^2$
十字相乘法
原理
$(x+m)(x+n)=x^2+(m+n)x+mn$
$(bx+m)(dx+n)=bdx^2+(bn+dm)x+mn$
适用对象
部分二次三项式
口诀
头尾分解，交叉相乘，求和凑中，试验筛选
因式分解的高端方法
分组分解法
分组→基本分解
添拆项法
添项、拆项→基本分解
换元法
整体代换思想：设元→基本分解→回代

有理数的认识

正负数

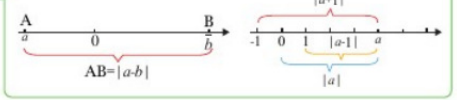
- **正数**：像3，1.8%，3.5这样大于0的数叫做正数
- **负数**：像−1，−2.7%，−4.5这样在正数前面加上负号“−”的数叫做负数
- **用正、负数表示相反意义的量：**
  1. 如果正数表示某种意义，那么负数表示它的相反的意义，反之亦然
  2. “相反意义的量”包括两个方面的含意：一是相反意义；二是相反意义的基础上要有量

有理数

- **定义**：整数与分数统称有理数
- **按定义分类**：
  - 有理数 → 整数 → 正整数 / 零 / 负整数
  - 有理数 → 分数 → 正分数 / 负分数
- **按符号分类**：
  - 有理数 → 正有理数 → 正整数 / 正分数
  - 有理数 → 零
  - 有理数 → 负有理数 → 负整数 / 负分数

绝对值

- **代数意义**：一个正数的绝对值是它本身；一个负数的绝对值是它的相反数；0的绝对值是0
- **几何意义**：数轴上表示数 a 的点与原点的距离叫做数 a 的绝对值．数 a 的绝对值记作“$|a|$”．拓展：数轴上表示数 a 和数 b 的两点之间的距离是 $|a-b|$



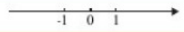
- **非负性**：绝对值具有非负性，绝对值的结果总是正数或 0

倒数

- **定义**：乘积为 1 的两个数互为倒数．a，b 互为倒数，则 ab =1；反之亦然
- **注**：
  ①倒数是成对出现的，单独一个数不能称为倒数；
  ②互为倒数的两个数的乘积一定是 1；0 没有倒数；
  ③求一个非零有理数的倒数，把它的分子和分母颠倒位置即可．

数轴

- **定义**：规定了原点、正方向和单位长度的直线



- **注**：
  ①原点、正方向、单位长度称为数轴的三要素，三者缺一不可．
  ②单位长度和长度单位是两个不同的概念，前者指所取度量单位的长度，后者指所取度量单位的名称，即单位长度是一条人为规定的代表“1”的线段，这条线段可长可短，按实际情况来规定，同一数轴上的单位长度一旦确定，则不能再改变．
- **数轴的画法**：
  1. 画一条水平的直线；
  2. 确定向右的方向为正方向，用箭头表示；
  3. 在这条直线上适当位置取一实心点作为原点；
  4. 选取适当的长度作单位长度，用细短线画出，并对应标注各数，同时要注意同一数轴的单位长度要一致．
- **有理数与数轴的关系**：一切有理数都可以用数轴上的点表示出来，但数轴上的点不都代表有理数，如 π 是无理数，但也可以在数轴上表示出来．
- **利用数轴比较有理数的大小**：数轴上右边的点所对应的数总大于左边的点所对应的数．因此，正数总大于零，负数总小于零，正数大于负数．

相反数

- **定义**：只有符号不同的两个数叫做互为相反数
  特别地，0 的相反数仍是 0
  相反数必须成对出现，不能单独存在
- **性质**：互为相反数的两个数的和为零，即若 a 与 b 互为相反数，则 $a+b=0$；反之，若 $a+b=0$，则 a 与 b 互为相反数
- **几何意义**：一对非零的相反数在数轴上应分别位于原点两侧，并且到原点的距离相等．
- **多重符号的化简**：
  1. 一个正数前面不管有多少个“+”号，都可以全部去掉；
  2. 一个正数前面有偶数个“−”号，也可以把“−”号全部去掉；
  3. 一个正数前面有奇数个“−”号，则化简后只保留一个“−”号；即“奇负偶正”：其中“奇偶”是指正数前面的“−”号的个数的奇偶数，“负正”是指化简的最后结果的符号

有理数的运算

有理数加减

有理数加法运算法则

1. 同号两数相加，取相同的符号，并把绝对值相加
2. （1）绝对值不相等的异号两数相加，取绝对值较大的加数符号，并用较大的绝对值减去较小的绝对值
   （2）互为相反数的两个数相加得 0
3. 一个数同 0 相加，仍得这个数

有理数加法运算步骤

1. 定类型——即确定适用的运算法则
2. 定符号——即确定结果的符号
3. 定绝对值——即确定是两个加数的绝对值的和或差

有理数加法运算律

1. 两个加数相加，交换加数的位置，和不变
   $a+b=b+a$（加法交换律）
2. 三个数相加，先把前两个数相加，或者先把后两个数相加，和不变
   $(a+b)+c=a+(b+c)$（加法结合律）

有理数减法运算法则

减去一个数，等于加这个数的相反数，即 $a-b=a+(-b)$（减法法则）

有理数减法运算步骤

1. 减化加——利用减法法则将减法转化为加法
2. 加法运算——进行加法运算的步骤

有理数加减运算技巧

1. 分数与小数均有时，应先化为统一形式
2. 带分数可分为整数与分数两部分参与运算
3. 多个数相加时，若有互为相反数的两个数，可先结合相加得零
4. 若有可以凑整的数，即相加得整数时，可先结合相加
5. 若有同分母的分数或易通分的分数，应先结合在一起
6. 符号相同的数可以先结合在一起
7. 裂项：裂和 、裂差

$$\frac{n+(n+1)}{n(n+1)}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1} \qquad \frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

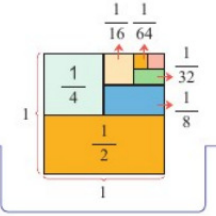
$$\frac{1}{n(n+d)}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+d}\right)$$

8. 错位相消

$$\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\right)\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\right)\times\left(\frac{3}{4}\times\frac{5}{4}\right)\times\cdots\cdots\times\left(\frac{2013}{2014}\times\frac{2015}{2014}\right)\times\left(\frac{2014}{2015}\times\frac{2016}{2015}\right)$$

9. 倒序相加
10. 错位相减
11. 数形结合

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$$



有理数乘除

有理数乘法运算法则

两数相乘，同号得正，异号得负，并把绝对值相乘 . 任何数同 0 相乘，都得 0

有理数除法运算法则

1. 除以一个不等于 0 的数，等于乘这个数的倒数；
2. 两数相除，同号得正，异号得负，并把绝对值相除；
3. 0 除以任何一个不等于 0 的数，都得 0

有理数乘除运算步骤

首先确定积或商的符号，然后再求出积或商的绝对值

有理数的乘法运算律

1. 乘法交换律 : 两个数相乘，交换因数的位置，积相等，可表示为 :$ab=ba$
2. 乘法结合律 : 三个数相乘，先把前两个数相乘，或者先把后两个数相乘，积相等，可表示为：$(ab)c=a(bc)$
3. 分配律 : 一个数与两个数的和相乘，等于把这个数分别与这两个数相乘，再把积相加，可表示为 :$a(b+c)=ab+ac$

有理数乘方

定义

求 n 个相同因数的积的运算，叫做乘方，乘方的结果叫做幂，在 a^n 中，a 叫做底数，n 叫做指数

含义

a^n 表示有 n 个 a 连续相乘

“奇负偶正”

在有理数乘方中，奇、偶指的是指数是奇数还是偶数 . 当底数为负数时，指数为奇数，则幂为负 ; 指数为偶数，则幂为正

有理数混合运算

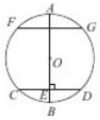
运算顺序

1. 先乘方，再乘除，最后加减
2. 同级运算，从左到右进行
3. 如有括号，先做括号内的运算，按小括号、中括号、大括号依次进行
4. 在进行有理数运算时，先确定符号，再计算绝对值，有括号的先算括号里的数

圆

垂径定理及推论

如图，AB 是 $\odot O$ 的直径，CD、FG 是弦



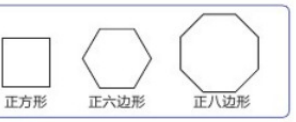
1. 若 $AB \perp CD$ 于 E，则 $CE=DE$；$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AD}$；$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{BD}$
2. 若 $CE=DE$，则 $AB \perp CD$；$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AD}$；$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{BD}$
3. 若 $FG \parallel CD$，则 $\overset{\frown}{FC}=\overset{\frown}{GD}$

- 垂直于弦的直径平分这条弦，并且平分弦所对的两条弧
- 平分弦（不是直径）的直径垂直于弦，并且平分弦所对的两条弧
- 弦的垂直平分线过圆心，且平分弦对的两条弧
- 平分一条弦所对的两条弧的直线过圆心，且垂直平分此弦
- 平行弦夹的弧相等

正多边形

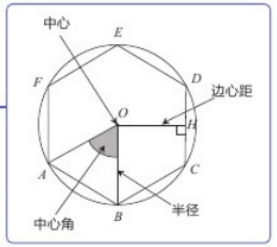
正多边形的定义

各条边相等，并且各个内角也都相等的多边形叫做正多边形



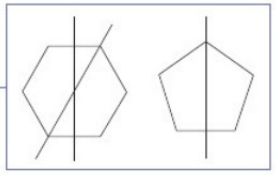
正多边形的相关概念

- 正多边形的中心：正多边形的外接圆的圆心叫做这个正多边形的中心
- 正多边形的半径：正多边形外接圆的半径叫做正多边形的半径
- 正多边形的中心角：正多边形每一边所对的圆心角叫做正多边形的中心角
- 正多边形的边心距：中心到正多边形的一边的距离叫做正多边形的边心距

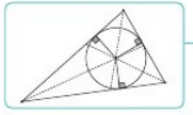


正多边形的性质

- 正 n 边形的半径和边心距把正 n 边形分成 2n 个全等的直角三角形
- 正多边形都是轴对称图形，正 n 边形共有 n 条通过正 n 边形中心的对称轴
- 偶数条边的正多边形既是轴对称图形，也是中心对称图形，其中心就是对称中心



三角形的四“心”

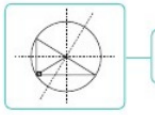


三角形的内心：是三角形三个角平分线的交点，它是三角形内切圆的圆心，在三角形内部，它到三角形三边的距离相等



锐角三角形外心在三角形内

三角形的外心：是三角形三边中垂线的交点，它是三角形外接圆的圆心，三角形外心到三角形三个顶点的距离相等



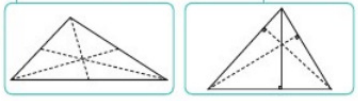
直角三角形外心是斜边中点

三角形的重心：是三角形三边中线的交点，在三角形内部；它到顶点的距离是到对边中点距离的 2 倍



钝角三角形外心在三角形外部

垂心：是三角形三边高线的交点

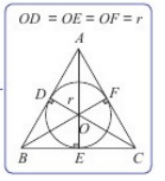


正三角形的内切圆

与正三角形的各边都相切的圆叫做正三角形的内切圆，正三角形的内切圆的圆心是正三角形的三条内角平分线的交点，它叫做正三角形的内心，这个圆叫做这个正三角形的内切圆

① 正三角形的内心到三边的距离相等，都等于内切圆半径 r

② 正三角形的内切圆有且只有一个，即对于给定的正三角形，其内心是唯一的

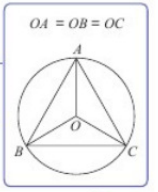


正三角形的外接圆

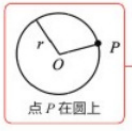
经过正三角形三个顶点的圆叫做正三角形的外接圆，外接圆的圆心是正三角形三条边垂直平分线的交点，叫做正三角形的外心，这个正三角形叫做这个圆的内接正三角形

① 圆心到正三角形各顶点的距离相等

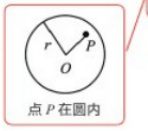
② 正三角形的外接圆有且只有一个，即对于给定的正三角形，其外心是唯一的，但一个圆的内接正三角形却有无数个，这些正三角形的外心重合



与圆有关的位置关系







设 $\odot O$ 的半径为 r，点 P 到圆心 O 的距离为 d，则有：

点在圆外 $\iff d>r$

点在圆上 $\iff d=r$

点在圆内 $\iff d<r$

点和圆的位置关系有：点在圆上、点在圆内、点在圆外三种，这三种关系由这个点到圆心的距离与半径的大小关系决定

直线和圆的位置关系有：直线和圆相离、直线和圆相切、直线和圆相交三种，直线和圆的位置关系由圆心到这条直线的距离与半径的大小关系决定

直线和圆相切



直线与圆有唯一公共点，直线叫做圆的切线，公共点叫做切点

直线和圆相交



直线与圆有两个公共点，直线叫做圆的割线

直线和圆相离



直线与圆没有公共点

设 $\odot O$ 的半径为 r，圆心 O 到直线 l 的距离为 d，则有：

$d>r \iff$ 直线 l 与 $\odot O$ 相离

$d=r \iff$ 直线 l 与 $\odot O$ 相切

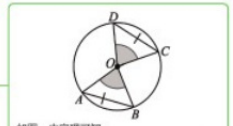
$d<r \iff$ 直线 l 与 $\odot O$ 相交

圆的性质

旋转不变性

① 圆是旋转对称图形，绕圆心旋转任一角度都和原来图形重合；圆是中心对称图形，对称中心是圆心

② 在同圆或等圆中，两个圆心角，两条弧，两条弦，两条弦心距，这四组量中的任意一组相等，那么它所对应的其他各组分别相等



如图，由定理可知：

若 $\angle AOB=\angle COD$，则 $AB=CD$、$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$

若 $AB=CD$，则 $\angle AOB=\angle COD$、$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$

若 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，则 $AB=CD$、$\angle AOB=\angle COD$

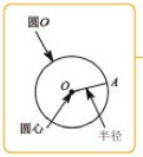
轴对称

圆是轴对称图形，经过圆心的任一直线都是它的对称轴

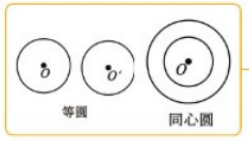
圆

圆的认识

圆的定义

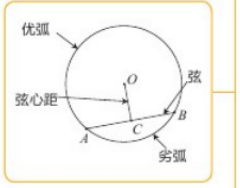


- 定义
  - 线段 OA 绕着它的一个端点 O 旋转一周，另一个端点 A 所形成的封闭曲线，叫做圆
  - 固定的端点叫做圆心，线段叫做半径
- 圆的定义
  - 圆上的各点到圆心的距离都等于半径长；在一个平面内，到圆心的距离等于半径长的点都在同一个圆上。因此，圆是在一个平面内，所有到一个定点的距离等于定长的点组成的图形
  - 确定一个圆的两个基本条件
    - ①圆心的位置（确定圆的位置）
    - ②半径的长短（确定圆的大小）



- 圆心相同且半径相等的圆叫做同圆
- 圆心相同，半径不相等的两个圆叫做同心圆
- 能够重合的两个圆叫做等圆（半径相等的两个圆是等圆）

弦、弧、弦心距、圆心角与圆周角



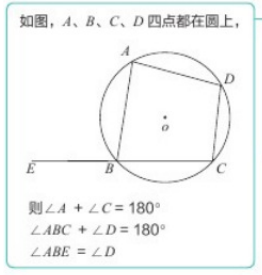
- 连接圆上任意两点的线段叫做弦．经过圆心的弦叫做直径，并且直径是同一圆中最长的弦，直径是半径的 2 倍
- 圆上任意两点间的部分叫做圆弧，简称弧．以 A、B 为端点的弧记作 $\overset{\frown}{AB}$，读作“圆弧 AB”，或“弧 AB”．
  - 在同圆或等圆中，能够互相重合的弧叫做等弧
- 圆的任意一条直径的两个端点把圆分成两条弧，每一条弧都叫做半圆
  - 在一个圆中大于半圆的弧叫做优弧，小于半圆的弧叫做劣弧
  - 在一个圆中，圆心到该圆的任一弦的距离，叫做这一弦的弦心距



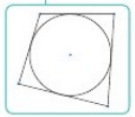
- 顶点在圆心的角叫做圆心角
- 顶点在圆上，并且两边都与圆相交的角叫做圆周角

圆与四边形

- 圆内接四边形
  - 圆内接四边形的对角互补，外角等于它的内对角



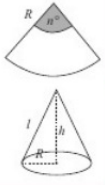
- 圆外切四边形
  - 各边都和圆相切的四边形叫圆外切四边形，圆外切四边形对边之和相等



弧长、扇形面积的相关计算

设⊙O 的半径为 R，$n°$ 圆心角所对弧长为 l，

1. 弧长公式：$l=\dfrac{n\pi R}{180}$
2. 扇形面积公式：$S_{扇形}=\dfrac{n}{360}\pi R^2=\dfrac{1}{2}lR$（$l$ 为扇形的弧长，R 为半径）
3. 圆锥体表面积公式：$S=\pi R^2+\pi Rl$（l 为母线，R 为底面圆的半径）



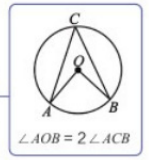
与圆有关的角

圆心角的性质

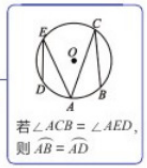
- 圆心角的度数等于它所对的弧的度数

圆周角的性质

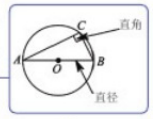
- ①圆周角等于它所对的弧所对的圆心角的一半



- ②同弧或等弧所对的圆周角相等；在同圆或等圆中，相等的圆周角所对的弧相等

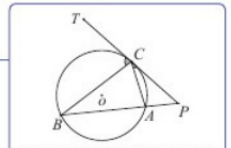


- ③ 90° 的圆周角所对的弦为直径；半圆或直径所对的圆周角为直角



弦切角

- 与圆相切的直线，同圆内过切点的弦所形成的夹角叫做弦切角
- 弦切角的定理
  - 弦切角等于它夹的弧所对的圆周角
  - 弦切角的度数等于它夹的弧的度数的一半

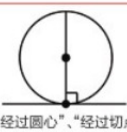


线段 PT 所在的直线切圆 O 于点 C，BC、AC 为圆 O 的弦，$\angle TCB$、$\angle TCA$、$\angle PCA$、$\angle PCB$ 都为弦切角 $\angle PCA=\angle B$，$\angle PCA=\angle BAC$，$\angle TCB=\angle BAC$

切线

性质

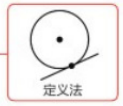
- 定理：圆的切线垂直于过切点的半径
- ①经过圆心作圆的切线的垂线经过切点
- ②经过切点作切线的垂线经过圆心



“经过圆心”、“经过切点”“互相垂直”知二推一．

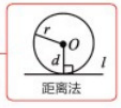
判定

- 定义：和圆只有一个公共点的直线是圆的切线



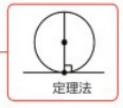
定义法

- 距离：与圆心距离等于半径长的直线是圆的切线



距离法

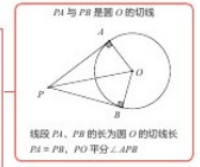
- 定理：经过半径的外端并且垂直于这条半径的直线是圆的切线



定理法

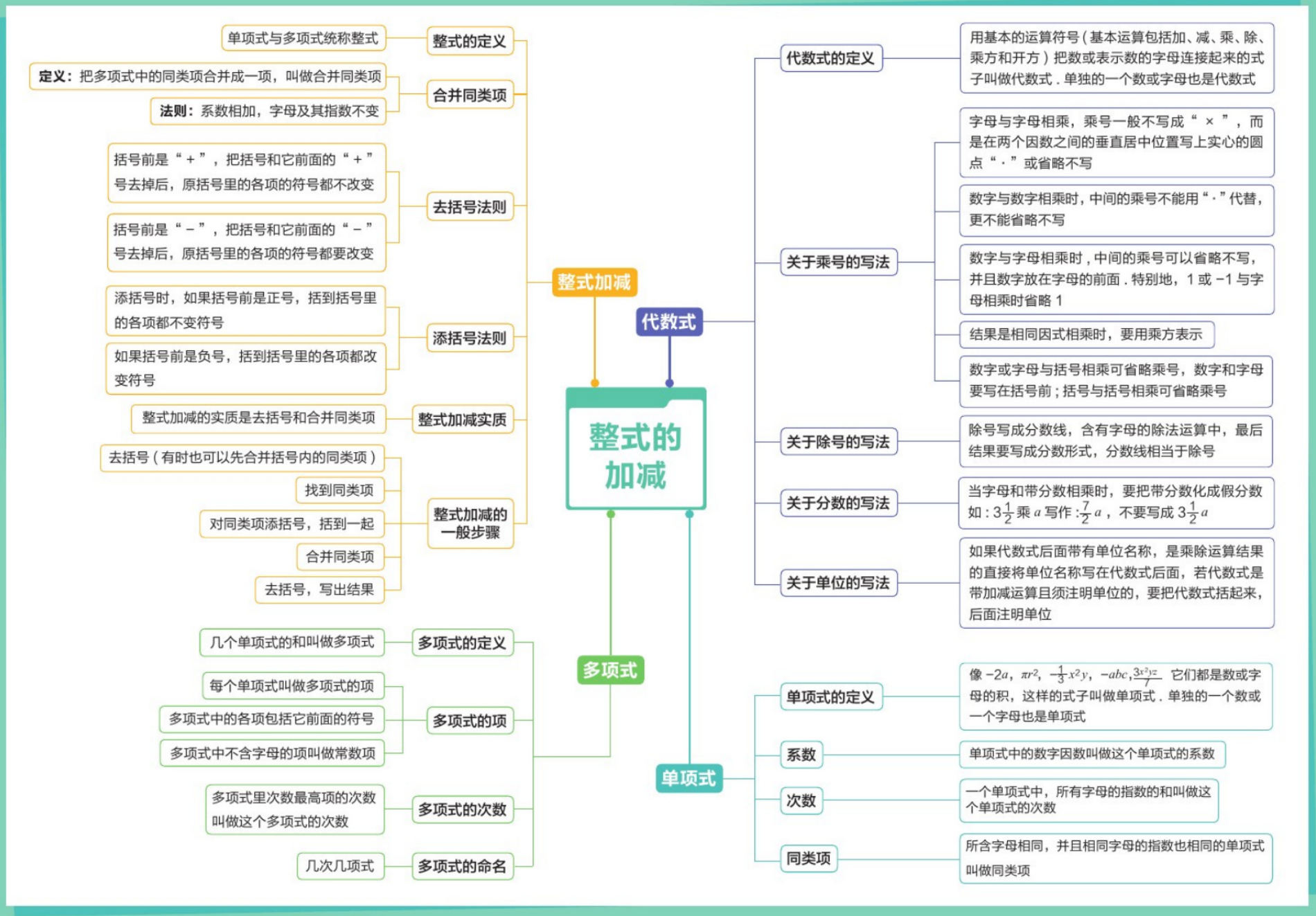
切线长

- 从圆外一点作圆的切线，这一点和切点之间的线段的长度叫做切线长



切线长定理

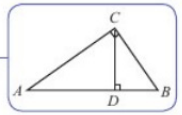
- 从圆外一点引圆的两条切线，它们的切线长相等，这一点和圆心的连线平分两条切线的夹角


整式的加减
整式加减
整式的定义
单项式与多项式统称整式
合并同类项
定义：把多项式中的同类项合并成一项，叫做合并同类项
法则：系数相加，字母及其指数不变
去括号法则
括号前是“+”，把括号和它前面的“+”号去掉后，原括号里的各项的符号都不改变
括号前是“−”，把括号和它前面的“−”号去掉后，原括号里的各项的符号都要改变
添括号法则
添括号时，如果括号前是正号，括到括号里的各项都不变符号
如果括号前是负号，括到括号里的各项都改变符号
整式加减实质
整式加减的实质是去括号和合并同类项
整式加减的一般步骤
去括号（有时也可以先合并括号内的同类项）
找到同类项
对同类项添括号，括到一起
合并同类项
去括号，写出结果
代数式
代数式的定义
用基本的运算符号（基本运算包括加、减、乘、除、乘方和开方）把数或表示数的字母连接起来的式子叫做代数式．单独的一个数或字母也是代数式
关于乘号的写法
字母与字母相乘，乘号一般不写成“×”，而是在两个因数之间的垂直居中位置写上实心的圆点“·”或省略不写
数字与数字相乘时，中间的乘号不能用“·”代替，更不能省略不写
数字与字母相乘时，中间的乘号可以省略不写，并且数字放在字母的前面．特别地，1 或 −1 与字母相乘时省略 1
结果是相同因式相乘时，要用乘方表示
数字或字母与括号相乘可省略乘号，数字和字母要写在括号前；括号与括号相乘可省略乘号
关于除号的写法
除号写成分数线，含有字母的除法运算中，最后结果要写成分数形式，分数线相当于除号
关于分数的写法
当字母和带分数相乘时，要把带分数化成假分数
如：$3\frac{1}{2}$ 乘 a 写作：$\frac{7}{2}a$，不要写成 $3\frac{1}{2}a$
关于单位的写法
如果代数式后面带有单位名称，是乘除运算结果的直接将单位名称写在代数式后面，若代数式是带加减运算且须注明单位的，要把代数式括起来，后面注明单位
多项式
多项式的定义
几个单项式的和叫做多项式
多项式的项
每个单项式叫做多项式的项
多项式中的各项包括它前面的符号
多项式中不含字母的项叫做常数项
多项式的次数
多项式里次数最高项的次数叫做这个多项式的次数
多项式的命名
几次几项式
单项式
单项式的定义
像 $-2a$，πr^2，$-\frac{1}{3}x^2y$，$-abc$，$\frac{3x^2yz}{7}$ 它们都是数或字母的积，这样的式子叫做单项式．单独的一个数或一个字母也是单项式
系数
单项式中的数字因数叫做这个单项式的系数
次数
一个单项式中，所有字母的指数的和叫做这个单项式的次数
同类项
所含字母相同，并且相同字母的指数也相同的单项式叫做同类项

直角三角形

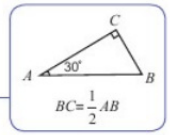
性质

1. 两个锐角互余

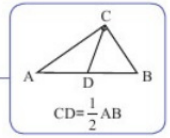


2. 勾股定理

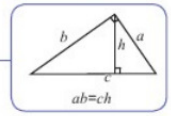
3. 30° 角所对的直角边等于斜边一半



4. 斜边上的中线等于斜边的一半

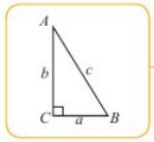


5. 两直角边的乘积等于斜边与斜边上高的乘积



勾股定理

勾股定理

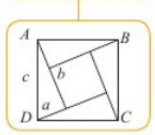


直角三角形中两条直角边的平方和等于斜边的平方，即 $a^2+b^2=c^2$

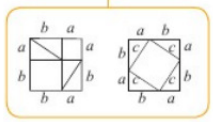
- 内容
- 实质：由“形”得到“数”

证明

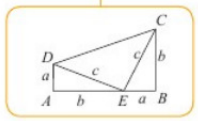
1. 赵爽弦图法



2. 毕达哥拉斯法



3. 加菲尔德总统法



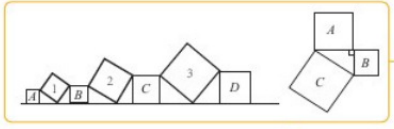
逆定理

如果三角形的两条边的平方和等于第三边的平方，那么这个三角形是直角三角形

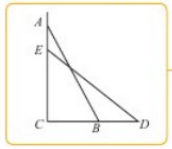
- 实质：由“数”得到“形”
- 勾股数：三个正整数，满足 $a^2+b^2=c^2$

实际应用

- 求几个图形的面积关系问题



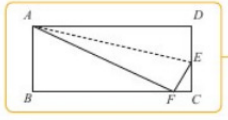
- 两点间距离问题
- 梯子问题



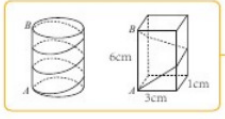
- 航海问题
- 风吹大树模型



- 折叠问题

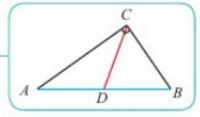


- 最短距离问题



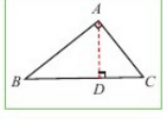
判定

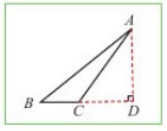
1. 有一个角是直角的三角形
2. 两个锐角互余
3. 勾股定理逆定理
4. 一条边上的中线等于这条边的一半（用时需要证明）



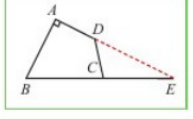
常见的构造方法

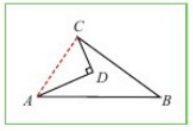
1 作高



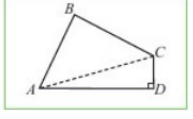


2 补全





3 分割



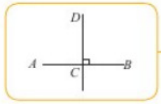
轴对称

线段的垂直平分线

定义

经过线段中点并且垂直于这条线段的直线，叫做这条线段的垂直平分线，也称之为中垂线

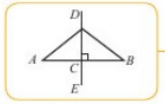
例如



若 $AC=BC$，$AB \perp CD$，则直线 DE 是线段 AB 的垂直平分线

线段垂直平分线的性质

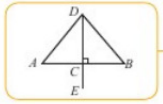
线段垂直平分线上的点与这条线段两个端点的距离相等



例如：已知直线 DE 是线段 AB 的垂直平分线，则 $DA=DB$

线段垂直平分线的判定

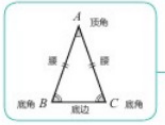
与一条线段两个端点距离相等的点在这条线段的垂直平分线上



例如：若 $DA=DB$，则点 D 在线段 AB 的垂直平分线上

等腰三角形

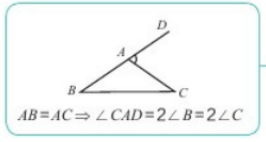
定义



有两条边相等的三角形叫做等腰三角形

性质

1. 等腰三角形的两底角相等，即等边对等角
2. “三线合一”，即顶角平分线、底边上的中线、底边上的高相互重合
3. 是轴对称图形，底边的垂直平分线是它的对称轴



$AB=AC \Rightarrow \angle CAD=2\angle B=2\angle C$

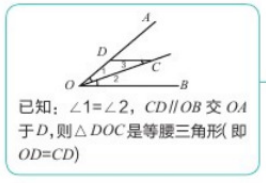
等腰三角形顶角的外角模型：等腰三角形顶角的外角等于其中一个底角的两倍



若 $AB=AC$ 或 $\angle B=\angle C$，则 $\triangle ABC$ 是等腰三角形

判定

1. 有两条边相等的三角形是等腰三角形
2. 有两个角相等的三角形是等腰三角形



已知：$\angle 1=\angle 2$，$CD \parallel OB$ 交 OA 于 D，则 $\triangle DOC$ 是等腰三角形（即 $OD=CD$）

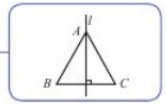
等腰三角形模型：平行线 + 角平分线，等腰三角形必呈现

轴对称图形与图形的轴对称

轴对称图形

如果一个平面图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，这个图形就叫做轴对称图形，这条直线就是它的对称轴，这时我们也说这个图形关于这条直线（成轴）对称

例如：等腰 $\triangle ABC$ 是轴对称图形



在理解轴对称图形时，应注意以下几点

1. 一个图形被对称轴分成两部分，对折后能重合(即全等)，这样的图形是轴对称图形，常见的有线段、角、等腰三角形、长方形、圆等
2. 轴对称图形的对称轴是一条直线，不是射线也不是线段，在叙述时应注意
3. 轴对称图形的对称轴条数至少有一条，否则不是轴对称图形，有的轴对称图形的对称轴条数是有限的，还有的有无限多条对称轴

两个图形成轴对称

把一个图形沿某一条直线折叠，能和另一个图形重合，那么就说这两个图形关于这条直线（成轴）对称。这条直线叫做对称轴，折叠后重合的点是对应点，叫做对称点

例如：$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 关于直线 L 对称，L 叫做对称轴，A 和 A'，B 和 B'，C 和 C' 是对称点



注：把成轴对称的两个图形看成一个整体，它就是一个轴对称图形

轴对称和轴对称图形的区别

轴对称涉及两个图形，是指两个图形的位置关系，而轴对称图形是指具有特殊形状的一个图形

轴对称的性质

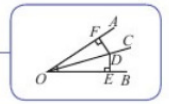
1. 关于一条直线对称的两个图形是全等形；
2. 如果两个图形关于某条直线对称，那么对称轴是任何一对对应点连线的垂直平分线；
3. 两个图形关于某条直线对称，如果它们的对应线段或延长线相交，那么交点在对称轴上；

轴对称

角的平分线

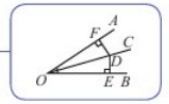
角平分线的性质

- 角的平分线上的点到角的两边的距离相等
- 例如：若射线 OC 是 $\angle AOB$ 的角平分线，且 $DF \perp OA$，$DE \perp OB$，则 $DE=DF$



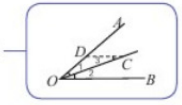
角平分线的判定

- 角的内部到角的两边的距离相等的点在角的平分线上
- 例如：若 $DF \perp OA$，$DE \perp OB$ 且 $DE=DF$，则 OC 是 $\angle AOB$ 的角平分线

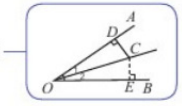


角平分线辅助线构造

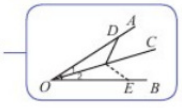
- 作平行
  - 平行线 + 角平分线，等腰三角形必呈现
  - 例如



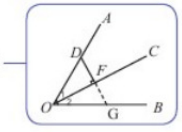
- 作垂线
  - 过角平分线上任意一点，向角两边作垂线，构造轴对称的全等三角形
  - 例如



- 作等线
  - 当题设有角平分线及角平分线一侧的三角形时，可截长补短，构造轴对称的全等三角形
  - 例如



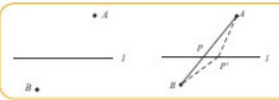
- 延长线
  - 当题设有角的一边上的点向角平分线作垂线段时，可延长这条垂线段，与角的另一边相交，构造轴对称的全等三角形
  - 例如



最短路径

探索 1

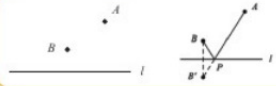
如图，在 l 上找一点 P，使 $PA+PB$ 最小



解析：直线 AB 与 l 的交点即为所求点 P，$PA+PB$ 最小值为线段 AB 的长度

探索 2

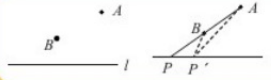
如图，在 l 上找一点 P，使 $PA+PB$ 最小



解析：作点 B 关于直线 l 的对称点 B'，直线 AB' 与 l 的交点即为所求点 P，$PA+PB$ 最小值为线段 AB' 的长度

探索 3

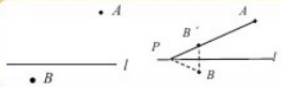
如图，在 l 上找一点 P，使 $|PA-PB|$ 最大



解析：直线 AB 与 l 的交点即为所求点 P，$|PA-PB|$ 最大值为线段 AB 的长度

探索 4

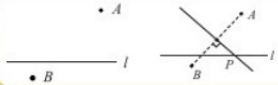
如图，在 l 上找一点 P，使 $|PA-PB|$ 最大



解析：作点 B 关于直线 l 的对称点 B，直线 AB' 与 l 的交点即为所求点 P，$|PA-PB|$ 最大值为线段 AB' 的长度

探索 5

如图，在 l 上找一点 P，使 $|PA-PB|$ 最小



解析：线段 AB 的中垂线与 l 的交点即为所求点 P，$|PA-PB|$ 最小值为 0

探索 6

如图，点 P 在锐角 $\angle AOB$ 的内部，在 OB 边上求作一点 D，在 OA 边上求作一点 C，使 $PC+CD$ 最小



解析：作点 P 关于直线 OA 的对称点 P'，再过 P' 作 OB 的垂线交直线 OA、OB 的于点 C、D，线段 $P'D$ 的长度即为 $PC+CD$ 的最小值

探索 7

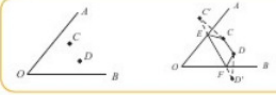
如图，点 P 在锐角 $\angle AOB$ 的内部，在 OB 边上求作一点 D，在 OA 边上求作一点 C，使 $\triangle PCD$ 的周长最小



解析：作点 P 关于直线 OA、OB 的对称点 P_1、P_2，P_1P_2 与直线 OA、OB 的交点为所求点 C、D，$\triangle PCD$ 的周长最小值为线段 P_1P_2 的长度

探索 8

如图，点 C、D 在锐角 $\angle AOB$ 的内部，在 OA 边上求作一点 E，在 OB 边上求作一点 F，使四边形 $CDFE$ 周长最小



解析：作 C、D 两点分别关于直线 OA、OB 的对称点 C'、D'，连接 $C'D'$ 分别交 OA、OB 于 E、F，点 E、F 即为所求周长最小 = $\angle D=\angle D'$