2025年上海市初中学业水平考试

数学试卷

一、选择题（本大题共6题，每题4分，满分24分）

1. 下列代数式中，计算正确的是（ ）

A. $m^3+m^3=2m^3$　　B. $m^3+m^3=m^6$

C. $m^3\cdot m^3=m^9$　　D. $(m^3)^3=m^6$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查代数式的运算，涉及合并同类项、同底数幂相乘、幂的乘方等基本法则；逐一验证各选项的正确性即可.

【详解】解：A：$m^3+m^3=2m^3$，合并同类项时，系数相加，字母部分不变，m^3的系数为1，故$1+1=2$，结果为$2m^3$，计算正确；

B：加法运算中，指数不改变，仅系数相加；正确结果应为$2m^3$，而非m^6，计算错误；

C：同底数幂相乘，底数不变，指数相加；$3+3=6$，结果应为m^6，而非m^9，计算错误；

D：幂的乘方运算中，底数不变，指数相乘；$3\times3=9$，结果应为m^9，而非m^6，计算错误；

故选：A.

2. 用代数式表示a与b差的平方，正确的是（ ）

A. a^2-b^2　　B. $(a-b)^2$　　C. a^2-b　　D. $a-b^2$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了列代数式，理解题中的数量关系是解题的关键；“a与b差的平方”指先求a减b的差，再将这个差整体平方，即$(a-b)^2$.

【详解】解：A. a^2-b^2：这是平方差公式的结果，表示 a 的平方减去 b 的平方，而非差的平方，错误，不符合题意；

B. $(a-b)^2$：表示先求差再平方，正确，符合题意；

C. a^2-b：仅对 a 平方后减去 b，未对差整体平方，错误，不符合题意；

D. $a-b^2$：表示 a 减去 b 的平方，运算顺序错误，错误，不符合题意；

故选：B．

3. 下列函数中，为正比例函数的是（ ）

A. $y=3x+1$　　B. $y=3x^2$　　C. $y=\frac{3}{x}$　　D. $y=\frac{x}{3}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了正比例函数的定义，形如 $y=kx$（k 为常数且 $k\neq0$）的函数是正比例函数；根据此定义逐一验证各选项是否符合该形式即可．

【详解】解：A：$y=3x+1$，该函数含常数项“+1”，不符合正比例函数 $y=kx$ 的形式，不符合题意；

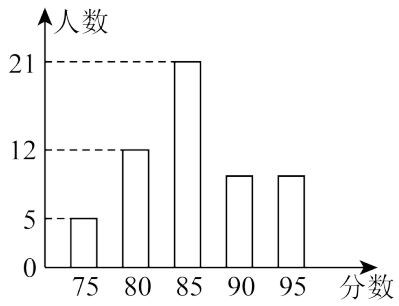
B：$y=3x^2$，该函数为二次函数（最高次数为 2），而正比例函数为一次函数，不符合题意；

C：$y=\frac{3}{x}$，该函数可写为 $y=3x^{-1}$，属于反比例函数，不符合一次函数的形式，不符合题意；

D：$y=\frac{x}{3}$，该函数可化简为 $y=\frac{1}{3}x$，符合 $y=kx$（$k=\frac{1}{3}$）的形式，是正比例函数，符合题意；

故答案为：D．

4. 某学校组织了一场体育测试，现抽出 60 个人的体育考试分数，并对此进行统计，如图所示．关于这 60 人的分数，下列说法正确的是（ ）



A. 中位数是 12　　B. 中位数是 75　　C. 众数是 21　　D. 众数是 85

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了众数与中位数，一组数据中出现次数最多的数叫做众数；把一组数据按大小排列，最中间一个（奇数个数据）或两个（偶数个数据）数据的平均数是中位数，按照这两个概念进行求解即可．

【详解】解：从统计图知，85 分出现的次数最多，故众数是 85；把分数按大小排列，最中间的两个数是第 30 与 31 个数，而 $5+12<5+12+21$，故中位数是 $\frac{1}{2}(85+85)=85$；故只有选项 D 正确；

故选：D．

5. 在正方形 $ABCD$ 中，$\left|AB+BC\right|:\left|CD\right|$ 的值为（　）

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. 1　　C. $\sqrt{2}$　　D. 2

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了向量、向量的加法及向量模，理解这些知识是关键；在正方形中，向量相加的模长即为正方形对角线的长，它与边长的比值可通过勾股定理直接计算即可．

【详解】解：设正方形边长为 a，由勾股定理得：$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{2}a$；

在正方形 $ABCD$ 中，$AB+BC$ 表示从 A 到 B 再到 C 的路径，其结果为向量 AC，即 $\left|AC\right|=\sqrt{2}a$；

$\therefore \frac{\left|AB+BC\right|}{\left|CD\right|}=\frac{\sqrt{2}a}{a}=\sqrt{2}$．

故选：C．

6. 在锐角三角形 ABC 中，$AB=AC$，$BC=8$，$\triangle ABC$ 的外接圆为 $\odot O$，且半径为 5，边 BC 中点为 D，

如果以 D 为圆心的圆与 $\odot O$ 相交，那么 $\odot D$ 的半径可以为（ ）

A. 2　　B. 5　　C. 8　　D. 9

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了等腰三角形的性质，勾股定理，两圆相交的条件等知识，掌握两圆相交的条件是关键；

根据题意，等腰 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 5，由等腰三角形的性质、勾股定理求得 $OD=3$；当 $\odot D$ 与 $\odot O$

相交时，圆心距需满足条件 $|5-r|<OD<5+r$，代入数值求解 r 的范围，进而确定选项．

【详解】解：如图，连接 AD 并延长交 $\odot O$ 于点 E，

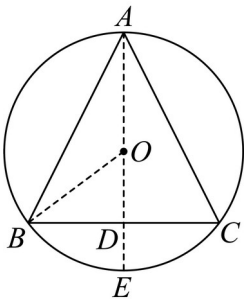
$\because AB=AC$，D 为 BC 中点，

$\therefore BD=DC=4$，$OD\perp BC$；

∵锐角三角形 ABC 中，$AB=AC$，

∴外接圆心 O　　AD 上，

连接 OB，由勾股定理得：$OD=\sqrt{OB^2-BD^2}=3$；



设以 D 为圆心的圆的半径为 r，$\odot D,\odot O$ 相交应满足：$|5-r|<OD<5+r$，

即 $|5-r|<3<5+r$，解得：$2<r<8$；

在此范围的半径只有选项 B；

故选：B．

二、填空题（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

7. 分解因式：$ab^2+a^2b=$_____．

【答案】$ab(a+b)$

【解析】

【分析】原式提取 ab 进行分解即可．

【详解】解：原式=$ab(a+b)$

故答案为：$ab(a+b)$

【点睛】此题考查了提公因式法的运用，熟练掌握因式分解的提公因式方法是解本题的关键．

8. 不等式组$\begin{cases}\frac{x}{2}-1>0\\2x+3\geq x\end{cases}$的解集为_____．

【答案】$x>2$

【解析】

【分析】本题考查求不等式组的解集，先求出每一个不等式的解集，找到它们的公共部分，即为不等式组的解集．

【详解】解：$\begin{cases}\frac{x}{2}-1>0①\\2x+3\geq x②\end{cases}$

由①，得：$x>2$；

由②，得：$x\geq -3$；

∴不等式组的解集为：$x>2$；

故答案为：$x>2$．

9. 已知关于 x 的一元二次方程 $2x^2+x-m=0$ 没有实数根，则 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m<-\frac{1}{8}$

【解析】

【分析】本题考查根的判别式，根据方程没有实数根，得到 $\Delta<0$，进行求解即可．熟练掌握根的判别式与根的个数之间的关系，是解题的关键．

【详解】解：由题意，得：$\Delta=1^2-4\times2\cdot(-m)<0$，

解得：$m<-\frac{1}{8}$；

故答案为：$m<-\frac{1}{8}$．

10. 已知一个反比例函数在各个象限内，y 随 x 的增大而减小，那么这个反比例函数的解析式可以是_____．（只需写出一个）

【答案】 $y=\frac{1}{x}$（答案不唯一）

【解析】

【分析】本题主要考查了反比例函数的增减性，根据增减性可知该反比例函数的比例系数大于 0，据此可得答案．

【详解】解：∵一个反比例函数在各个象限内，y 随 x 的增大而减小，

∴该反比例函数的比例系数大于 0，

∴符合题意的反比例函数解析式可以为 $y=\frac{1}{x}$，

故答案为：$y=\frac{1}{x}$（答案不唯一）．

11. 方程 $\sqrt{x-6}=2$ 的解为_____.

【答案】 $x=10$

【解析】

【分析】本题考查解无理方程，利用平方法将方程转化为一元一次方程，进行求解，检验即可．

【详解】解：∵$\sqrt{x-6}=2$，

∴$x-6=4$，

∴$x=10$；

经检验，$x=10$是原方程的解，

故答案为：$x=10$．

12. 将函数$y=3x^2$的图像向下平移 2 个单位后，得到的新函数的解析式为_____．

【答案】$y=3x^2-2$

【解析】

【分析】本题考查了二次函数图像的平移，平移法则是：左加右减，上加下减；据此法则即可求解．

【详解】解：∵函数$y=3x^2$的图像向下平移 2 个单位，

∴平移后的新函数的解析式为$y=3x^2-2$；

故答案为：$y=3x^2-2$．

13. 小明与小杰在玩卡牌游戏，已知小明手里有 1．2，3，4 四张牌，小杰手里有 2，4，6，8 四张牌，小明从小杰手里抽出一张牌，如果抽到小杰手中四张卡牌中的任意一张概率都相等，那么小明抽出的这张卡牌中，和自己手中某一张卡牌的数字一样的概率为_____．

【答案】$\frac{1}{2}$

【解析】

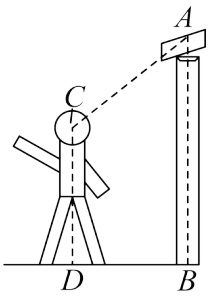
【分析】本题主要考查了简单的概率计算，直接用小杰手中卡牌上的数字与小明手中卡牌上的数字相同的卡牌数除以小杰的卡牌总数即可得到答案．

【详解】解：∵小杰一共有 4 种卡牌，其中有 2 张卡牌上的数字与小明手中卡片的数字相同，

∴小明抽出的这张卡牌中，和自己手中某一张卡牌的数字一样的概率为$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$，

故答案为：$\frac{1}{2}$．

14. 某公司需要员工上班时通过门禁，在门禁上方设置了人脸扫描仪，已知扫描仪（线段AB）的竖直高度2.7米，某人（线段CD）身高为1.8米，扫描仪测得$\angle A=53^{\circ}$，那么该人与扫描仪的水平距离为_____米．（备用数据：$\sin 53^{\circ}\approx 0.8$，$\cos 53^{\circ}\approx 0.6$，$\tan 53^{\circ}\approx 1.33$，精确到$0.1$米）

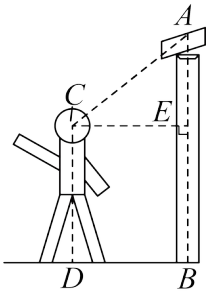


【答案】1.2

【解析】

【分析】本题考查解直角三角形的实际应用，过点C作$CE\perp AB$于点E，由题意，得$BE=CD=1.8$，线段的和差求出AE的长，解$\mathrm{Rt}\triangle ACE$，求出CE的长即可．添加辅助线构造直角三角形，是解题的关键．

【详解】解：过点C作$CE\perp AB$于点E，则：$BE=CD=1.8$米，



$\because AB=2.7$米，

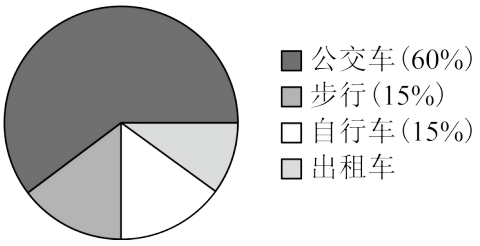
$\therefore AE=AB-BE=0.9$米，

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACE$ 中，$\tan A=\frac{CE}{AE}=\frac{CE}{0.9}\approx 1.33$，

$\therefore CE\approx 1.2$ 米；

故答案为：1.2．

15. 为了解乘客到达高铁站后离开的方式．某地开展问卷调查，共收到有效答复 2000 张，调查结果如图所示．如果当地每天离开高铁站的人数约为 1.8 万人，那么当地每天乘坐出租车离开的人数大约为_____．



【答案】1800 人

【解析】

【分析】本题考查利用样本估计总体，扇形统计图，根据扇形统计图求出样本中当地每天乘坐出租车离开的人数所占的比例，再用总人数乘以这个比例，进行计算即可．

【详解】解：$1.8\times(1-60\%-15\%-15\%)=0.18$（万人）$=1800$（人）；

故答案为：1800 人．

16. 据报道，我国某科研团队近期成功研制出一种新闪存器件，其快速擦写速度全球领先．已知一皮秒等于 1×10^{-12} 秒，该器件执行一次擦写需要 400 皮秒，则该器件一秒可以擦写_____次（科学记数法表示）．

【答案】2.5×10^{9}

【解析】

【分析】本题主要考查了科学记数法，根据题意可得 1 秒等于 1×10^{12} 皮秒，再由该器件执行一次擦写需要 400 皮秒列式求解即可．

【详解】解：$1\times10^{12}\div400=2.5\times10^{9}$，

$\therefore$ 该器件一秒可以擦写 2.5×10^{9} 次，

故答案为：2.5×10^{9}．

17. 在矩形$ABCD$中，E在边CD上，E关于直线AD的对称点为F，联结BE，AF，如果四边形$AFEB$是菱形，那么$AB:AD$的值为_____．

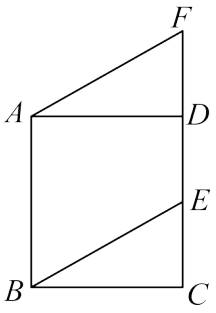
【答案】$\frac{2\sqrt{3}}{3}$##$\frac{2}{3}\sqrt{3}$

【解析】

【分析】本题主要考查了矩形的性质，菱形的性质，轴对称的性质，勾股定理，由轴对称的性质可得$DF=DE$，设$DF=DE=m$，则$EF=DE+DF=2m$，由菱形的性质得到$AB=AF=EF=2m$，证明$\angle ADF=90°$，利用勾股定理可得$AD=\sqrt{3}m$，据此可得答案．

【详解】解；∵E关于直线AD的对称点为F，

∴$DF=DE$，



设$DF=DE=m$，则$EF=DE+DF=2m$，

∵四边形$AFEB$是菱形，

∴$AB=AF=EF=2m$，

∵四边形$ABCD$是矩形，

∴$\angle ADC=90°$，

$\therefore \angle ADF = 180^\circ - \angle ADC = 90^\circ$，

$\therefore AD = \sqrt{AF^2 - DF^2} = \sqrt{3}m$，

$\therefore AB : AD = 2m : \sqrt{3}m = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，

故答案为：$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$．

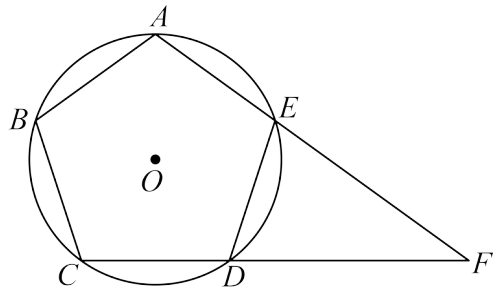
18. 已知一个圆与一个角的两边各有两个公共点，且在两边上截得的两条弦正好是该圆内接正五边形的两条边，那么这个角的大小是_____．

【答案】36° 或108°

【解析】

【分析】本题考查正多边形与圆，如图，分两种情况，当角的顶点在圆上时，如 $\angle ABC$，弦为 AB, BC 时，此时 $\angle ABC$ 恰好是正五边形的一个内角，进行求解即可，当角的顶点在圆外部时，即 $\odot O$ 交 $\angle AFC$ 的两边，截取的两条弦为 AE, CD 时，进行求解即可．

【详解】解：如图，当角的顶点在圆上时，如 $\odot O$ 交 $\angle ABC$ 的两边，截取的两条弦为 AB, BC，此时 $\angle ABC$ 恰好是正五边形的一个内角，



$\therefore \angle ABC = \dfrac{(5-2)\times 180^\circ}{5} = 108^\circ$；

当角的顶点在圆外部，即$\odot O$交$\angle AFC$的两边，截取的两条弦为AE,CD时，

则：$\angle AED=\angle CDE=\dfrac{(5-2)\times 180^{\circ}}{5}=108^{\circ}$，

$\therefore \angle FED=\angle FDE=180^{\circ}-108^{\circ}=72^{\circ}$，

$\therefore \angle F=180^{\circ}-2\times 72^{\circ}=36^{\circ}$；

综上：这个角的大小是36°或108°；

故答案为：36°或108°.

三、解答题（本大题共 7 题，满分 78 分）

19. 计算：$\dfrac{4}{\sqrt{5}+1}-20^{\frac{1}{2}}+\left|2-\sqrt{5}\right|+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}$.

【答案】5

【解析】

【分析】本题考查的是实数的混合运算，二次根式的混合运算，分数指数幂的含义，先分母有理化，计算分数指数幂，绝对值，负整数指数幂，再合并即可.

【详解】解：$\dfrac{4}{\sqrt{5}+1}-20^{\frac{1}{2}}+\left|2-\sqrt{5}\right|+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}$

$=\dfrac{4(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}-\sqrt{20}+\sqrt{5}-2+8$

$=\sqrt{5}-1-2\sqrt{5}+\sqrt{5}-2+8$

$=5$.

20. 解方程：$\dfrac{x-3}{x-2}-\dfrac{2}{x^2-3x+2}=\dfrac{2}{x-1}$.

【答案】$x=5$

【解析】

【分析】本题主要考查了解分式方程，先把原方程去分母化为整式方程，再解方程并检验即可得到答案.

【详解】解：$\frac{x-3}{x-2}-\frac{2}{x^2-3x+2}=\frac{2}{x-1}$

方差两边同时乘以$(x-2)(x-1)$得：$(x-3)(x-1)-2=2(x-2)$，

去括号得：$x^2-3x-x+3-2=2x-4$，

移项，合并同类项得：$x^2-6x+5=0$，

$\therefore (x-1)(x-5)=0$，

$\therefore x-1=0$或$x-5=0$，

解得$x=1$或$x=5$，

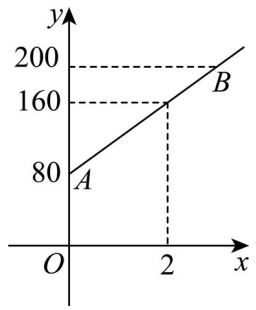
检验，当$x=1$时，$x-1=0$，此时$x=1$是原方程的增根，

当$x=5$时，$(x-2)(x-1)=12\neq 0$，此时$x=5$是原方程的解，

∴原方程的解为$x=5$.

21. 已知学校热水器有一个可以储200升（L）水　　储水装置，且水在装满储水装置时会自动停止，如

图所示为储水量y与加水时间x的关系，已知温度t（单位：℃）与x的关系为：$t=\frac{20x+100}{x+2}$.



（1）求y关于x的函数解析式并写出定义域；

(2) 当水加满时，储水装置内水的温度为多少?

【答案】 (1) $y=40x+80(0\le x\le 3)$

(2) $32^{\circ}\mathrm{C}$

【解析】

【分析】本题主要考查了一次函数的实际应用，求分式的值，正确求出对应的函数解析式是解题的关键.

(1) 利用待定系数法求出对应的函数解析式，再求出函数值为 200 时自变量的值即可求出定义域;

(2) 根据 (1) 所求可得加满水时，x 的值，据此代值计算即可.

【小问 1 详解】

解：设 y 关于 x 的函数解析式为 $y=kx+b(k\neq 0)$，

把 $(0,80),(2,160)$ 代入 $y=kx+b(k\neq 0)$ 中得 $\begin{cases}2k+b=160\\ b=80\end{cases}$，

$\therefore\begin{cases}k=40\\ b=80\end{cases}$，

$\therefore$ y 关于 x 的函数解析式为 $y=40x+80$，

当 $y=40x+80=200$ 时，$x=3$，

$\therefore 0\le x\le 3$;

【小问 2 详解】

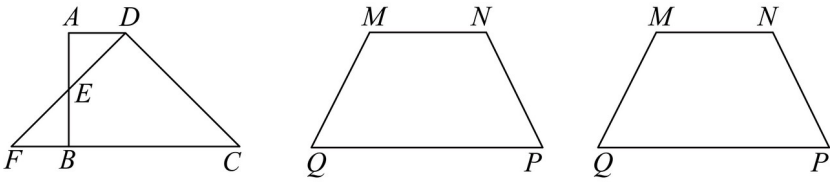
解；由 (1) 可得当 $y=200$ 时，$x=3$，

∴加满水时，$x=3$，

$\therefore t=\dfrac{20x+100}{x+2}=\dfrac{20\times 3+100}{3+2}=32$

答：当水加满时，储水装置内水的温度为 $32^{\circ}\mathrm{C}$.

22. 小明正在进行探究活动：分割梯形并将其拼成等腰三角形，请你帮他一起探究.



(1) (2) (3)

（1）如图（1）所示，在梯形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$AB \perp BC$．设 E 为边 AB 中点，将 $\triangle ADE$ 绕点 E 旋转 180°，点 D 旋转至点 F 位置，得到的 $\triangle DFC$ 是等腰三角形，其中 $DF=DC$，设 $AD=a$，求边 BC 的长（用 a 表示）；

（2）如图（2）所示，已知梯形 $MQPN$ 中，$MN \parallel QP$，且 $MN<PQ$，$MQ=NP$．请设计一种方案，用一条或两条直线将梯形 $MQPN$ 分割，并使得分割成的几个部分可以通过图形运动拼成与剩余部分不重叠无缝隙的等腰三角形．请写出两腰的线段，以及这两条或一条直线与梯形的交点的位置．（模仿（1）中的论述语言：E 为边 AB 中点，D 是梯形 $ABCD$ 的顶点）．

【答案】 (1) $BC=3a$

(2) 见解析

【解析】

【分析】本题考查了变换：旋转、平移与轴对称，等腰三角形的性质等知识；

（1）过点 D 作 $DH \perp BC$ 于 H，则由等腰三角形的性质得 $FC=2FH$；证明四边形 $ABHD$ 是矩形，则有 $BH=AD=a$；再由旋转知 $BF=AD=a$，则可求得 FH 的长，最后求得结果；

（2）连接 QN，把 $\triangle MNQ$ 通过平移变换，再轴对称变换得到 $\triangle NPG$，则 $\triangle NQG$ 为满足条件的等腰三角形．

【小问 1 详解】

解：如图，过点 D 作 $DH \perp BC$ 于 H，

$\because DF = DC$，

$\therefore FC = 2FH$；

$\because AD \parallel BC$，$AB \perp BC$，

$\therefore \angle A = 180^\circ - \angle ABC = 90^\circ$，

$\therefore \angle A = \angle ABC = \angle DHB = 90^\circ$，

∴四边形 $ABHD$ 是矩形，

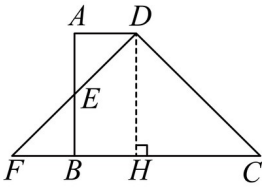
$\therefore BH = AD = a$；

由旋转知 $BF = AD = a$，

$\therefore FH = BH + BF = 2a$，

$\therefore FC = 2FH = 4a$，

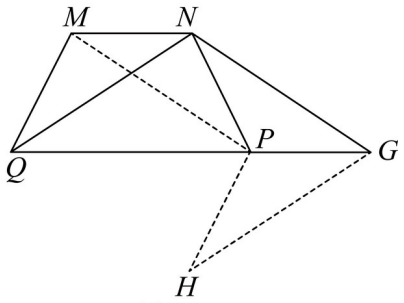
$\therefore BC = FC - FB = 4a - a = 3a$；



(1)

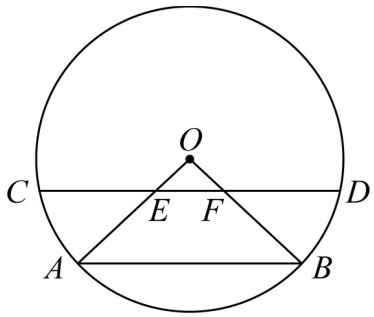
【小问 2 详解】

解：如图（2），连接 QN，MP，把 $\triangle MNQ$ 沿 MP 平移使 M 与 P 对应，得到 $\triangle PGH$；再把 $\triangle PGH$ 沿 QG 对折，得到 $\triangle NPG$，H 与 N 是对应点，则 $\triangle NQG$ 是等腰三角形，其中两腰分别为 NQ，NG，点 N、Q 分别是梯形的顶点．



(2)

23. 如图，已知 AB，CD 为 $\odot O$ 中的两弦，联结 OA，OB 交弦 CD 于点 E，F，且 $CE=DF$.



(1) 求证：$AB \parallel CD$；

(2) 如果 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BD}$，求证：$AB^2=BF\cdot OB$.

【答案】 (1) 见解析　(2) 见解析

【解析】

【分析】本题主要考查了相似三角形的性质与判定，弧，弦与圆心角之间的关系，全等三角形的性质与判定，等腰三角形的性质与判定等等，正确作出辅助线是解题的关键.

(1) 连接 OC，OD，由等边对等角得到 $\angle OCD=\angle ODC$，利用 SAS 证明 $\triangle OCE\cong\triangle ODF$，得到 $OE=OF$，证明 $\triangle OEF\backsim\triangle OAB$，得到 $\angle OEF=\angle OAB$，则可证明 $AB\parallel CD$；

(2) 连接 OD，BD，由 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BD}$，得到 $\angle AOB=\angle BOD$，$AB=BD$，证明 $\triangle AOB\cong\triangle BOD(\mathrm{SAS})$，得到 $\angle OBD=\angle OAB$，则可证明 $\angle OBA=\angle BFD$，进而证明 $\triangle OAB\backsim\triangle DBF$，推出 $AB\cdot DF=OB\cdot BF$；再证明 $\angle DFB=\angle DBF$，得到 $BD=DF$，则可证明 $AB^2=OB\cdot BF$.

【小问 1 详解】

证明：如图所示，连接$OC,\ \ OD$，

$\because OC=OD$，

$\therefore \angle OCD=\angle ODC$，

在$\triangle OCE$和$\triangle ODF$中，

$$\begin{cases} OC=OD \\ \angle OCE=\angle ODF \\ CE=DF \end{cases},$$

$\therefore \triangle OCE\cong\triangle ODF(\mathrm{SAS})$，

$\therefore OE=OF$，

$\because OA=OB$，

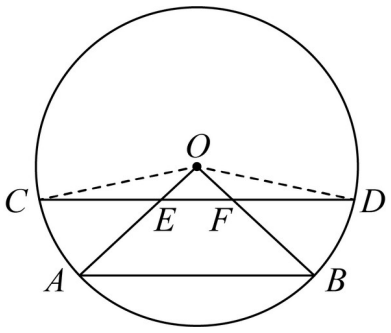
$\therefore \dfrac{OE}{OA}=\dfrac{OF}{OB}$，

又$\because \angle EOF=\angle AOB$，

$\therefore \triangle OEF\backsim\triangle OAB$，

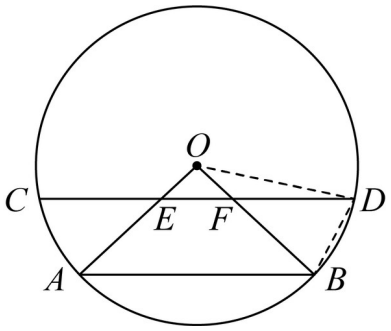
$\therefore \angle OEF=\angle OAB$，

$\therefore AB/\!/CD$；



【小问2详解】

证明：如图所示，连接$OD,\ \ BD$，



$\because \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BD}$,

$\therefore \angle AOB=\angle BOD$，$AB=BD$，

又$\because OA=OB=OD$，

$\therefore \triangle AOB\cong\triangle BOD(\mathrm{SAS})$，

$\therefore \angle OBD=\angle OAB$；

由（1）可得$AB/\!/CD$，

$\therefore \angle OFE=\angle OBA$，

又$\because \angle OFE=\angle BFD$，

$\therefore \angle OBA=\angle BFD$，

$\therefore \triangle OAB\backsim\triangle DBF$，

$\therefore \dfrac{OB}{DF}=\dfrac{AB}{BF}$，

$\therefore AB\cdot DF=OB\cdot BF$；

$\because OA=OB$，

$\therefore \angle OAB=\angle OBA$，

$\therefore \angle DFB = \angle DBF$，

$\therefore BD = DF$，

$\therefore DF = AB$，

$\therefore AB^2 = OB \cdot BF$.

24. 在平面直角坐标系中，抛物线$y = x^2 + bx + c$过$A(1,1)$，$B(3,1)$，与y轴交于点C，顶点为P.

(1) 求b，c的值.

(2) 设抛物线$y = ax^2 + mx + n(a \neq 1)$过点A，$B$，且与$y$轴交于点$D$，顶点为$Q$.

① 求$\dfrac{CD}{PQ}$的值；

② 当四边形$CDPQ$是直角梯形时，求该直角梯形中最小内角的正弦值.

【答案】 (1) $b = -4,\ c = 4$

(2) ①3；② $\dfrac{\sqrt{17}}{17}$或$\dfrac{3}{5}$.

【解析】

【分析】 (1) 利用待定系数法求解即可；

(2) ①先把抛物线$y = x^2 - 4x + 4$的解析式化为顶点式求出点P坐标，再求出点C坐标；把点A和点B坐标代入$y = ax^2 + mx + n(a \neq 1)$中可得抛物线$y = ax^2 + mx + n(a \neq 1)$的解析式为$y = ax^2 - 4ax + 3a + 1(a \neq 1)$，据此可求出点$P$和点$D$的坐标，再表示出$CD,\ PQ$即可得到答案；

② 可证明$PQ \parallel y$轴，即$PQ \parallel CD$，则当四边形$CDPQ$是直角梯形时，只有$PQ \perp CQ$或$PQ \perp DP$，据此画出对应的示意图，讨论求解即可.

【小问 1 详解】

解：∵抛物线$y=x^2+bx+c$过$A(1,1)$，$B(3,1)$，

$\therefore \begin{cases}1+b+c=1\\9+3b+c=1\end{cases}$，

$\therefore \begin{cases}b=-4\\c=4\end{cases}$；

【小问2详解】

解：①由（1）得抛物线$y=x^2+bx+c$得解析式 $y=x^2-4x+4=(x-2)^2$，

∴点P的坐标为$(2,0)$，

在$y=x^2-4x+4$中，当$x=0$时，$y=4$，

∴点C的坐标为$(0,4)$；

∵抛物线$y=ax^2+mx+n(a\neq1)$过点A，B，

$\therefore \begin{cases}a+m+n=1\\9a+3m+n=1\end{cases}$，

$\therefore \begin{cases}m=-4a\\n=3a+1\end{cases}$，

∴抛物线$y=ax^2+mx+n(a\neq1)$的解析式为$y=ax^2-4ax+3a+1(a\neq1)$，

∴抛物线$y=ax^2-4ax+3a+1(a\neq1)$的对称轴为直线$x=-\dfrac{-4a}{2a}=2$，

在$y=ax^2-4ax+3a+1(a\neq1)$中，当$x=2$时，$y=4a-8a+3a+1=-a+1$，

当$x=0$时，$y=3a+1$，

∴$D(0,3a+1)$，$Q(2,-a+1)$，

∴$CD=|3a+1-4|=|3a-3|=3|a-1|$，$PQ=|-a+1-0|=|a-1|$，

$\therefore \dfrac{CD}{PQ}=\dfrac{3|a-1|}{|a-1|}=3$；

②$\because Q(2,-a+1)$，$P(2,0)$，

$\therefore PQ \parallel y$ 轴，即 $PQ \parallel CD$，

$\therefore$ 当四边形 $CDPQ$ 是直角梯形时，只有 $PQ \perp CQ$ 或 $PQ \perp DP$，

如图 2-1 所示，当 $PQ \perp CQ$ 时，

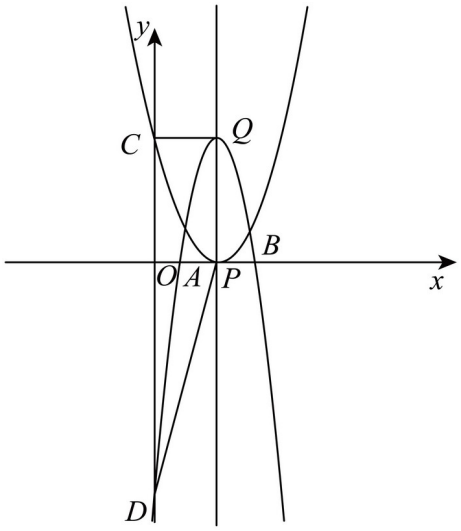


图2-1

$\because$ 点 C 的坐标为 $(0,4)$，$Q(2,-a+1)$，

$\therefore -a+1=4$，

$\therefore a=-3$，

$\therefore 3a+1=-8$，

$\therefore D(0,-8)$，

$\therefore OD=8$，

$\because P(2,0)$，

$\therefore OP=2$，

在$\mathrm{Rt}\triangle OPD$中，$PD=\sqrt{OD^2+OP^2}=\sqrt{8^2+2^2}=2\sqrt{17}$，

$\therefore \sin\angle ODP=\dfrac{OP}{PD}=\dfrac{2}{2\sqrt{17}}=\dfrac{\sqrt{17}}{17}$；

如图2-2所示，当$PQ\perp DP$时，

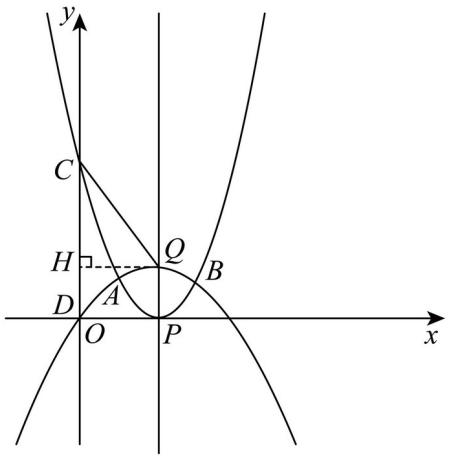


图2-2

$\because P(2,0)$，$D(0,3a+1)$，

$\therefore 3a+1=0$，

$\therefore a=-\dfrac{1}{3}$，

$\therefore -a+1=\dfrac{4}{3}$，

$\therefore Q\left(2,\dfrac{4}{3}\right)$；

如图所示，过点Q作$QH\perp y$轴于H，则$H\left(0,\dfrac{4}{3}\right)$，

$\therefore CH=4-\dfrac{4}{3}=\dfrac{8}{3}$，$QH=2$，

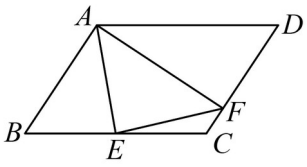
在 $\mathrm{Rt}\triangle CQH$ 中，由勾股定理得 $CQ=\sqrt{CH^2+QH^2}=\sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2+2^2}=\frac{10}{3}$，

$\therefore \sin\angle HCQ=\frac{QH}{CQ}=\frac{2}{\frac{10}{3}}=\frac{3}{5}$.

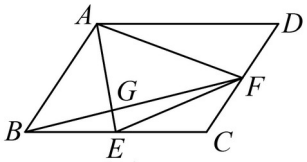
综上所述，当四边形 $CDPQ$ 是直角梯形时，该直角梯形中最小内角的正弦值为 $\frac{\sqrt{17}}{17}$ 或 $\frac{3}{5}$.

【点睛】本题主要考查了求二次函数解析式，求角的正弦值，二次函数的性质，二次函数与几何综合等等，利用分类讨论的思想求解是解题的关键.

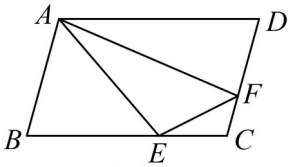
25. 在平行四边形 $ABCD$ 中，E，F 分别为边 BC，CD 上两点.



（1）



（2）



（3）

（1）当 E 是边 BC 中点时，

① 如图（1），联结 EF，如果 $AE=EF$，求证：$\angle BAE=\angle CFE$；

② 如图（2），如果 $CF=DF$，联结 AE，BF 交边 AE 于点 G，求 $S_{\triangle BEG}:S_{\triangle AEF}$ 的值；

（2）如图（3）所示，联结 AE，AF，如果 $AD=5$，$AB=3$，$CF=1$，$\angle AEB=\angle AFE=\angle EFC$．求 AF 的长.

【答案】（1）①见解析；②$\frac{2}{15}$

(2) $AF=\frac{5\sqrt{3}+6}{2}$

【解析】

【分析】（1）①延长 FE，AB 交于 H，可证明 $\triangle BEH\cong\triangle CEF(\mathrm{AAS})$，得到

$EH=EF,\ \angle H=\angle CFE$，则可证明$AE=EH$，得到$\angle H=\angle BAE$，则$\angle BAE=\angle CFE$；

② 如图所示，延长$BF,\ AD$交于M，由平行四边形的性质得到$AD\parallel BC$，$AD=BC$，证明

$\triangle BEG\backsim\triangle MAG$，$\triangle BCF\backsim\triangle MDF$，得到$\frac{BE}{AM}=\frac{GE}{AG}=\frac{BG}{GM}$，$\frac{BC}{DM}=\frac{BF}{MF}=\frac{CF}{DF}=1$，则

$BF=MF,\ BC=DM$；设$CE=BE=m$，则$BC=DM=2m$，$AM=AD+DM=4m$，进而可得

$\frac{GE}{AG}=\frac{BG}{MG}=\frac{BE}{AM}=\frac{1}{4}$，即可得到$\frac{BG}{GF}=\frac{2}{3}$；可证明$\frac{S_{\triangle BGE}}{S_{\triangle BGA}}=\frac{S_{\triangle GFE}}{S_{\triangle GFA}}=\frac{GE}{AG}=\frac{1}{4}$，$\frac{S_{\triangle ABG}}{S_{\triangle AFG}}=\frac{BG}{FG}=\frac{2}{3}$，

设$S_{\triangle ABG}=4n$，则$S_{\triangle BGE}=n,\ S_{\triangle AFG}=6n$，则$S_{\triangle EGF}=\frac{3}{2}n$，据此可得答案；

（2）延长$AD,\ EF$交于M，由平行四边形的性质可得$AD\parallel BC$，$CD=AB=3$，证明

$\triangle AEF\backsim\triangle MEA$，$\triangle AEF\backsim\triangle ECF$，再证明$\triangle ECF\backsim\triangle MDF$，得到$\frac{EC}{DM}=\frac{EF}{FM}=\frac{CF}{DF}$，求出

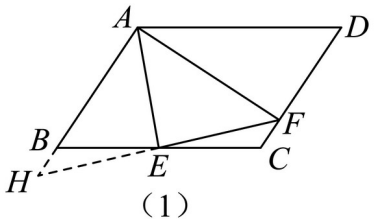
$DF=CD-CF=2$，设$CE=s,\ FE=t$，则由相似三角形的性质可得$AE=st,\ AF=t^2$，

$DM=2s,\ FM=2t$，进而可得$AM=AD+DM=5+2s$；再由$\triangle AEF\backsim\triangle MEA$，得到

$\frac{t}{st}=\frac{st}{t+2t}=\frac{t^2}{5+2s}$，则$\begin{cases}\frac{t}{st}=\frac{st}{t+2t}\\ \frac{st}{t+2t}=\frac{t^2}{5+2s}\end{cases}$，解方程即可得到答案.

【小问 1 详解】

解：①如图所示，延长$FE,\ AB$交于H，



（1）

∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AB \parallel CD$，

∴ $\angle EBH = \angle ECF$，$\angle EHB = \angle EFC$，

∵ E 是边 BC 中点，

∴ $BE = CE$，

∴ $\triangle BEH \cong \triangle CEF(\mathrm{AAS})$，

∴ $EH = EF$，$\angle H = \angle CFE$，

∵ $AE = EF$，

∴ $AE = EH$，

∴ $\angle H = \angle BAE$，

∴ $\angle BAE = \angle CFE$；

② 如图所示，延长 BF，AD 交于 M，

∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AD \parallel BC$，$AD = BC$，

∴ $\triangle BEG \backsim \triangle MAG$，$\triangle BCF \backsim \triangle MDF$，

$\therefore \dfrac{BE}{AM}=\dfrac{GE}{AG}=\dfrac{BG}{GM}$，$\dfrac{BC}{DM}=\dfrac{BF}{MF}=\dfrac{CF}{DF}=1$，

$\therefore BF=MF,\ BC=DM$，

$\because E$ 是边 BC 中点，

$\therefore BC=2CE=2BE$，

设 $CE=BE=m$，则 $BC=DM=2m$，

$\therefore AM=AD+DM=4m$，

$\therefore \dfrac{GE}{AG}=\dfrac{BG}{MG}=\dfrac{BE}{AM}=\dfrac{m}{4m}=\dfrac{1}{4}$，

$\because \dfrac{BF}{MF}=1$，

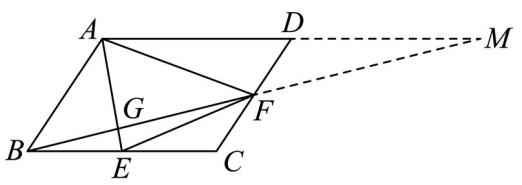
$\therefore \dfrac{BG}{GF}=\dfrac{2}{3}$；

$\therefore \dfrac{S_{\triangle BGE}}{S_{\triangle BGA}}=\dfrac{S_{\triangle GFE}}{S_{\triangle GFA}}=\dfrac{GE}{AG}=\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{S_{\triangle ABG}}{S_{\triangle AFG}}=\dfrac{BG}{FG}=\dfrac{2}{3}$，

设 $S_{\triangle ABG}=4n$，则 $S_{\triangle BGE}=n,\ S_{\triangle AFG}=6n$，

$\therefore S_{\triangle EGF}=\dfrac{3}{2}n$，

$\therefore \dfrac{S_{\triangle BGE}}{S_{\triangle AEF}}=\dfrac{S_{\triangle BGE}}{S_{\triangle AGF}+S_{\triangle EGF}}=\dfrac{n}{6n+\dfrac{3}{2}n}=\dfrac{2}{15}$；



小问 2 详解】

解；如图所示，延长 $AD,\ EF$ 交于 M，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AD \parallel BC$，$CD = AB = 3$，

$\therefore \angle AEB = \angle EAD$，

$\because \angle AEB = \angle AFE = \angle EFC$，

$\therefore \angle EFA = \angle EAD$，

又$\because \angle AEF = \angle MEA$，

$\therefore \triangle AEF \backsim \triangle MEA$；

$\because \angle AEB + \angle AEF + \angle FEC = \angle EFC + \angle FCE + \angle FEC = 180^\circ$，$\angle AEB = \angle EFC$，

$\therefore \angle AEF = \angle FCE$，

$\therefore \triangle AEF \backsim \triangle ECF$，

$\because AD \parallel BC$，

$\therefore \triangle ECF \backsim \triangle MDF$，

$\therefore \dfrac{EC}{DM} = \dfrac{EF}{FM} = \dfrac{CF}{DF}$，

$\because CF = 1$，

$\therefore DF = CD - CF = 2$，

设 $CE = s,\ FE = t$，

$\because \triangle AEF \backsim \triangle ECF$，

$\therefore \dfrac{CF}{EF}=\dfrac{CE}{AE}=\dfrac{EF}{AF}$，即$\dfrac{1}{t}=\dfrac{s}{AE}=\dfrac{t}{AF}$

$\therefore AE=st,\ \ AF=t^2$，

$\because \dfrac{EC}{DM}=\dfrac{EF}{FM}=\dfrac{CF}{DF}$，即$\dfrac{s}{DM}=\dfrac{t}{FM}=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore DM=2s,\ \ FM=2t$，

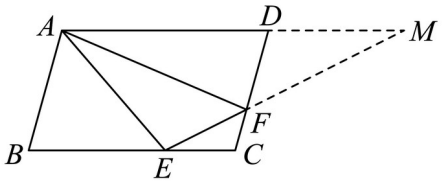
$\therefore AM=AD+DM=5+2s$；

$\because \triangle AEF\backsim\triangle MEA$，

$\therefore \dfrac{EF}{AE}=\dfrac{AE}{EM}=\dfrac{AF}{AM}$，即$\dfrac{t}{st}=\dfrac{st}{t+2t}=\dfrac{t^2}{5+2s}$，

$\therefore \begin{cases}\dfrac{t}{st}=\dfrac{st}{t+2t}\\ \dfrac{st}{t+2t}=\dfrac{t^2}{5+2s}\end{cases}$，解得$\begin{cases}s=\sqrt{3}\\ t^2=\dfrac{5\sqrt{3}+6}{2}\end{cases}$或$\begin{cases}s=-\sqrt{3}\\ t^2=\dfrac{5\sqrt{3}-6}{2}\end{cases}$（舍去），

$\therefore AF=\dfrac{5\sqrt{3}+6}{2}$.



【点睛】本题主要考查了平行四边形的性质，全等三角形的性质与判定，相似三角形的性质与判定，等腰三角形的性质与判定，正确作出辅助线构造全等三角形和相似三角形是解题的关键.