2024年上海市初中学业水平考试

数学试卷

1．本场考试时间100分钟，试卷共4页，满分150分，答题纸共2页．

2．作答前，请在答题纸指定位置填写姓名、报名号、座位号．并将核对后的条形码贴在答题纸指定位置．

3．所有作答务必填涂或书写在答题纸上与试卷题号对应的区域，不得错位．在试卷上作答一律不得分．

4．用2*B*铅笔作答选择题，用黑色字迹钢笔、水笔或圆珠笔作答非选择题．

一、选择题（每题4分，共24分）

1. 如果$x>y$，那么下列正确的是（　）

A $x+5<y+5$　　B. $x-5<y-5$　　C. $5x>5y$　　D. $-5x>-5y$

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了不等式的基本性质，根据不等式两边加（或减）同一个数（或式子），不等号的方向不变．不等式两边乘（或除以）同一个正数，不等号的方向不变．不等式两边乘（或除以）同一个负数，不等号的方向改变．

【详解】解：A．两边都加上5，不等号的方向不改变，故错误，不符合题意；

B．两边都加上-5，不等号的方向不改变，故错误，不符合题意；

C．两边同时乘上大于零的数，不等号的方向不改变，故正确，符合题意；

D．两边同时乘上小于零的数，不等号的方向改变，故错误，不符合题意；

故选：C．

2. 函数 $f(x)=\frac{2-x}{x-3}$ 的定义域是（　）

A. $x=2$　　B. $x\neq 2$　　C. $x=3$　　D. $x\neq 3$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查求函数定义域，涉及分式有意义的条件：分式分母不为 0，解不等式即可得到答案，熟练掌握求函数定义域的方法是解决问题的关键．

【详解】解：函数 $f(x)=\frac{2-x}{x-3}$ 的定义域是 $x-3\neq 0$，解得 $x\neq 3$，

故选：D．

3. 以下一元二次方程有两个相等实数根的是（　）

A. $x^2-6x=0$　　B. $x^2-9=0$

C. $x^2-6x+6=0$　　D. $x^2-6x+9=0$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程判别式判断根的情况，解答本题的关键是熟练掌握一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$，当 $\Delta=b^2-4ac>0$ 时，方程有两个不相等实数根；当 $\Delta=b^2-4ac=0$ 时，方程的两个相等的实数根；当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，方程没有实数根．分别计算出各选项中的根的判别式的值，即可判断．

【详解】解：A．$\Delta=(-6)^2-4\times1\times0=36>0$，该方程有两个不相等实数根，故 A 选项不符合题意；

B．$\Delta=0^2-4\times1\times(-9)=36>0$，该方程有两个不相等实数根，故 B 选项不符合题意；

C．$\Delta=(-6)^2-4\times1\times6=12>0$，该方程有两个不相等实数根，故 C 选项不符合题意；

D．$\Delta=(-6)^2-4\times1\times9=0$，该方程有两个相等实数根，故 D 选项不符合题意；

故选：D．

4. 科学家同时培育了甲乙丙丁四种花，从甲乙丙丁选个开花时间最短的并且最平稳的．

种类	甲种类	乙种类	丙种类	丁种类
平均数	2.3	2.3	2.8	3.1
方差	1.05	0.78	1.05	0.78

A. 甲种类　　B. 乙种类　　C. 丙种类　　D. 丁种类

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查了用平均数和方差做决策，根据平均数的定义以及方差的定义做决策即可． 解题的关键是掌握方差的意义：方差是反映一组数据的波动大小的一个量．方差越大，则平均值的离散程度越大，稳定性也越小；反之，则它与其平均值的离散程度越小，稳定性越好．

【详解】解：∵由表格可知四种花开花时间最短的为甲种类和乙种类，

四种花的方差最小的为乙种类和丁种类，方差越小越稳定，

∴乙种类开花时间最短的并且最平稳的，

故选：B．

5. 四边形 $ABCD$ 为矩形，过 A、C 作对角线 BD 的垂线，过 B、D 作对角线 AC 的垂线，如果四个垂线拼成一个四边形，那这个四边形为（　）

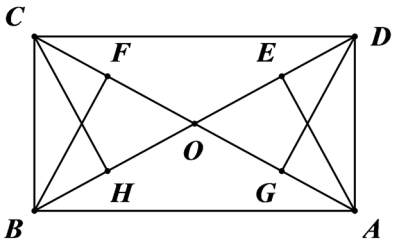
A. 菱形　　B. 矩形　　C. 直角梯形　　D. 等腰梯形

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查矩形性质、等面积法、菱形的判定等知识，熟练掌握矩形性质及菱形的判定是解决问题的关键．由矩形性质得到 $S_{\triangle OBC}=S_{\triangle OAD}$，$OC=OB=OA=OD$，进而由等面积法确定 $CH=BF=AE=DG$，再由菱形的判定即可得到答案．

【详解】解：如图所示：



、四边形$ABCD$为矩形，

$\therefore S_{\triangle OBC}=S_{\triangle OAD}$，$OC=OB=OA=OD$，

、过A、C作对角线BD的垂线，过B、D作对角线AC的垂线，

$\therefore S_{\triangle OBC}=S_{\triangle OAD}=\frac{1}{2}OC\cdot BF=\frac{1}{2}OB\cdot CH=\frac{1}{2}OD\cdot AE=\frac{1}{2}OA\cdot DG$

$\therefore CH=BF=AE=DG$，

如果四个垂线拼成一个四边形，那这个四边形为菱形，

故选：A．

6. 在$\triangle ABC$中，$AC=3$，$BC=4$，$AB=5$，点P在$\triangle ABC$内，分别以A、B、P为圆心画，圆A半径为1，圆B半径为2，圆P半径为3，圆A与圆P内切，圆P与圆B的关系是（　）

A. 内含　　B. 相交　　C. 外切　　D. 相离

【答案】B

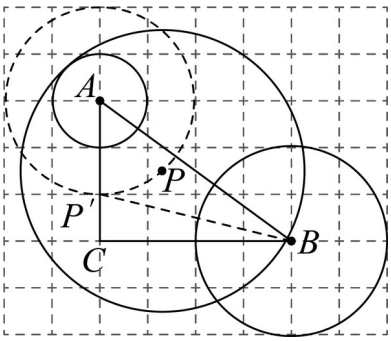
【解析】

【分析】本题考查圆的位置关系，涉及勾股定理，根据题意，作出图形，数形结合，即可得到答案，熟记圆的位置关系是解决问题的关键．

【详解】解：、圆A半径为1，圆P半径为3，圆A与圆P内切，

$\therefore$圆A含在圆P内，即$PA=3-1=2$，

$\therefore P$在以A为圆心、2为半径的圆与$\triangle ABC$边相交形成的弧上运动，如图所示：



∴当到P'位置时，圆P与圆B圆心距离PB最大，为$\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$，

$\sqrt{17}<3+2=5$，

∴圆P与圆B相交，

故选：B．

二、填空题（每题4分，共48分）

7. 计算：$(4x^2)^3=$_____．

【答案】$64x^6$

【解析】

【分析】本题考查了积的乘方以及幂的乘方，掌握相关运算法则是解题关键．先将因式分别乘方，再结合幂的乘方计算即可．

【详解】解：$(4x^2)^3=64x^6$，

故答案为：$64x^6$．

8. 计算$(a+b)(b-a)=$_____．

【答案】b^2-a^2

【解析】

【分析】根据平方差公式进行计算即可．

【详解】解：$(a+b)(b-a)$

$=(b+a)(b-a)$

$=b^2-a^2$，

故答案为：b^2-a^2．

【点睛】本题考查平方差公式，此为基础且重要知识点，必须熟练掌握．

9. 已知$\sqrt{2x-1}=1$，则$x=$_____．

【答案】1

【解析】

【分析】本题主要考查了二次根式有意义的条件，掌握二次根式中的被开方数是非负数是解题的关键．由二次根式被开方数大于0可知$2x-1>0$，则可得出$2x-1=1$，求出x即可．

【详解】解：根据题意可知：$2x-1>0$，

$\therefore 2x-1=1$，

解得：$x=1$，

故答案为：1．

10. 科学家研发了一种新的蓝光唱片，一张蓝光唱片的容量约为2×10^5 GB，一张普通唱片的容量约为25 GB，则蓝光唱片的容量是普通唱片的_____倍．（用科学记数法表示）

【答案】8×10^3

【解析】

【分析】本题考查科学记数法，按照定义，用科学记数法表示较大的数时，一般形式为$a\times10^n$，其中$1\le|a|<10$，n为整数，按要求表示即可得到答案，确定a与n的值是解决问题的关键．

【详解】解：蓝光唱片的容量是普通唱片的$\frac{2\times10^5}{25}=8000=8\times10^3$倍，

故答案为：8×10^3．

11. 若正比例函数$y=kx$的图像经过点$(7,-13)$，则y的值随x的增大而_____．（选填“增大”或“减小”）

【答案】减小

【解析】

【分析】本题考查了一次函数图象上点的坐标特征以及正比例函数的性质，牢记“当$k>0$时，y随x的增大而增大；当$k<0$时，y随x的增大而减小”是解题的关键．利用一次函数图象上点的坐标特征，可求出$k=-\frac{13}{7}$，结合正比例函数的性质，即可得出y的值随x的增大而减小．

【详解】解：∵正比例函数$y=kx$的图象经过点$(7,-13)$，

$\therefore -13=7k$，

解得：$k=-\frac{13}{7}$，

又∵$k=-\frac{13}{7}<0$，

$\therefore y$的值随x的增大而减小．

故答案为：减小．

12. 菱形$ABCD$中，$\angle ABC=66^\circ$，则$\angle BAC=$_____．

【答案】57° ##57度

【解析】

【分析】本题考查了菱形的性质，等腰三角形的性质以及三角形内角和定理，利用菱形性质得出$AB=BC$，利用等边对等角得出$\angle BAC=\angle ACB$，然后结合三角形内角和定理求解即可．

【详解】解：∵四边形$ABCD$菱形，

$\therefore AB=BC$，

$\therefore \angle BAC=\angle ACB=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle ABC)=\frac{1}{2}(180^\circ-66^\circ)=57^\circ$，

故答案为：57°．

13. 某种商品的销售量y（万元）与广告投入x（万元）成一次函数关系，当投入10万元时销售额1000万元，当投入90万元时销售量5000万元，则投入80万元时，销售量为_____万元．

【答案】4500

【解析】

【分析】本题考查求一次函数解析式及求函数值，设$y=kx+b$，根据题意找出点代入求出解析式，然后把$x=80$代入求解即可．

【详解】解：设$y=kx+b$，

把$(10,1000)$，$(90,5000)$代入，得$\begin{cases}10k+b=1000\\90k+b=5000\end{cases}$，

解得$\begin{cases}k=50\\b=500\end{cases}$，

$\therefore y=50x+500$，

当$x=80$时，$y=50\times80+500=4500$，

即投入80万元时，销售量为4500万元，

故答案为：4500．

14. 一个袋子中有若干个白球和绿球，它们除了颜色外都相同随机从中摸一个球，恰好摸到绿球的概率是$\frac{3}{5}$，则袋子中至少有_____个绿球．

【答案】3

【解析】

【分析】本题主要考查了已知概率求数量，一元一次不等式的应用，设袋子中绿球有$3x$个，则根据概率

计算公式得到球的总数为$5x$个，则白球的数量为$2x$个，再由每种球的个数为正整数，列出不等式求解即可．

【详解】解：设袋子中绿球有$3x$个，

∵摸到绿球的概率是$\frac{3}{5}$，

∴球的总数为$3x \div \frac{3}{5} = 5x$个，

∴白球的数量为$5x - 3x = 2x$个，

∵每种球的个数为正整数，

∴$2x > 0$，且x为正整数，

∴$x > 0$，且x为正整数，

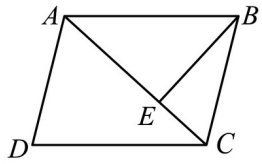
∴x的最小值为1，

∴绿球的个数的最小值为3，

∴袋子中至少有3个绿球，

故答案为：3．

15. 如图，在平行四边形$ABCD$中，E为对角线AC上一点，设$AC = a$，$\overrightarrow{BE} = b$，若$AE = 2EC$，则$DC =$_____（结果用含a，b的式子表示）．



【答案】$\frac{2}{3}\vec{a} - \vec{b}$

【解析】

【分析】本题考查了平面向量的知识，解答本题的关键是先确定各线段之间的关系．先求出$AE = \frac{2}{3}AC$，

从而可得 $AB=AE+EB$.

【详解】解：∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore DC\parallel AB$，$DC=AB$.

∵E 是 AC 上一点，$AE=2EC$，

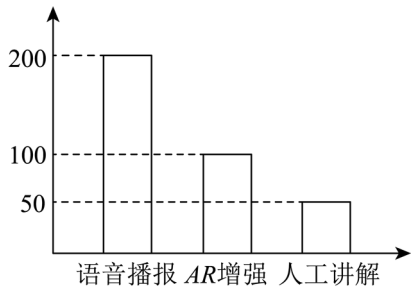
$\therefore AE=\frac{2}{3}AC$，

∴ $AB=AE+EB=AE-BE=\frac{2}{3}\vec{a}-\vec{b}$，

$\therefore \overrightarrow{DC}=\frac{2}{3}\vec{a}-\vec{b}$，

故答案为：$\frac{2}{3}\vec{a}-\vec{b}$.

16. 博物馆为展品准备了人工讲解、语音播报和 AR 增强三种讲解方式，博物馆共回收有效问卷 1000 张，其中 700 人没有讲解需求，剩余 300 人中需求情况如图所示（一人可以选择多种），那么在总共 2 万人的参观中，需要 AR 增强讲解的人数约有_____人.



【答案】2000

【解析】

【分析】本题考查条形统计图及用样本的某种“率”估计总体的某种“率”，正确得出需要 AR 增强讲解

的人数占有需求讲解的人数的百分比是解题关键．先求出需求讲解的人数占有效问卷的百分比，再根据条形统计图求出需要 AR 增强讲解的人数占有需求讲解的人数的百分比，进而可得答案．

【详解】解：∵共回收有效问卷 1000 张，其中 700 人没有讲解需求，剩余 300 人有需求讲解，

∴需求讲解的人数占有效问卷的百分比为 $\frac{300}{1000}\times 100\% = 30\%$，

由条形统计图可知：需要 AR 增强讲解的人数为 100 人，

∴需要 AR 增强讲解的人数占有需求讲解的人数的百分比为 $\frac{100}{300}=\frac{1}{3}$，

∴在总共 2 万人的参观中，需要 AR 增强讲解的人数约有 $20000\times 30\%\times\frac{1}{3}=2000$（人），

故答案为：2000

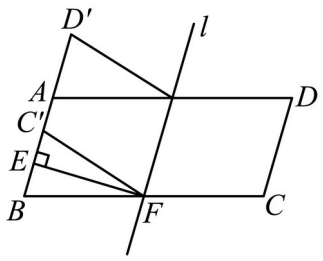
17. 在平行四边形 $ABCD$ 中，$\angle ABC$ 是锐角，将 CD 沿直线 l 翻折至 AB 所在直线，对应点分别为 C'，D¢，若 $AC':AB:BC=1:3:7$，则 $\cos\angle ABC=$ _____．

【答案】$\frac{2}{7}$ 或 $\frac{4}{7}$ ## $\frac{4}{7}$ 或 $\frac{2}{7}$

【解析】

【分析】本题考查了平行四边形的翻折，求余弦值，等腰三角形的判定及性质，解题的关键是利用分类讨论的思想进行求解．

【详解】解：当 C' 在 AB 之间时，作下图，



根据 $AC':AB:BC=1:3:7$，不妨设 $AC'=1, AB=3, BC=7$，

由翻折　　性质知：$\angle FCD=\angle FC'D'$，

、CD沿直线l翻折至AB所在直线，

$\therefore \angle BC'F+\angle FC'D'=\angle FCD+\angle FBA$，

$\therefore \angle BC'F=\angle FBA$。

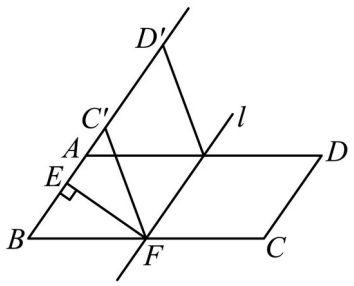
$CF=BF=C'F=\frac{7}{2}$，

过F作AB的垂线交于E，

$\therefore BE=\frac{1}{2}BC'=1$，

$\therefore \cos\angle ABC=\frac{BE}{BF}=\frac{1}{\frac{7}{2}}=\frac{2}{7}$，

当C'在BA的延长线上时，作下图，



根据$AC':AB:BC=1:3:7$，不妨设$AC'=1,AB=3,BC=7$，

同理知：$CF=BF=C'F=\frac{7}{2}$，

过F作AB的垂线交于E，

$\therefore BE=\frac{1}{2}BC'=2$，

$\therefore \cos\angle ABC=\dfrac{BE}{BF}=\dfrac{2}{\frac{7}{2}}=\dfrac{4}{7}$，

故答案为：$\dfrac{2}{7}$或$\dfrac{4}{7}$．

18. 对于一个二次函数$y=a(x-m)^2+k$（$a\neq 0$）中存在一点$P(x',y')$，使得$x'-m=y'-k\neq 0$，则称$2|x'-m|$为该抛物线的“开口大小”，那么抛物线$y=-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x+3$“开口大小”为_____．

【答案】4

【解析】

【分析】本题考查新定义运算与二次函数综合，涉及二次函数性质、分式化简求值等知识，读懂题意，理解新定义抛物线的“开口大小”，利用二次函数图象与性质将一般式化为顶点式得到$-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{x'-\frac{1}{3}}$，按照定义求解即可得到答案，熟记二次函数图象与性质、理解新定义是解决问题的关键．

【详解】解：根据抛物线的“开口大小”的定义可知$y-k=a(x-m)^2$中存在一点$P(x',y')$，使得$x'-m=y'-k\neq 0$，则$a=\dfrac{y'-k}{(x'-m)^2}=\dfrac{1}{x'-m}$，

$\because y=-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x+3$

$=-\dfrac{1}{2}\left(x^2-\dfrac{2}{3}x\right)+3$

$=-\dfrac{1}{2}\left(x^2-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{9}\right)+3$

$=-\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}\right)+\frac{1}{18}+3$

$=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{55}{18}$，

∴ $y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x+3$ 中存在一点 $P(x',y')$，有 $-\frac{1}{2}=\frac{1}{x'-\frac{1}{3}}$，解得 $x'-\frac{1}{3}=-2$，则 $2\left|x'-\frac{1}{3}\right|=4$，

∴抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x+3$ “开口大小”为 4，

故答案为：4．

三、简答题（共 78 分，其中第 19-22 题每题 10 分，第 23、24 题每题 12 分，第 25 题 14 分）

19. 计算：$|1-\sqrt{3}|+24^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}-(1-\sqrt{3})^0$．

【答案】$2\sqrt{6}$

【解析】

【分析】本题考查了绝对值，二次根式，零指数幂等，掌握化简法则是解题的关键．先化简绝对值，二次根式，零指数幂，再根据实数的运算法则进行计算．

【详解】解：$|1-\sqrt{3}|+24^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}-(1-\sqrt{3})^0$

$=\sqrt{3}-1+2\sqrt{6}+\frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}-1$

$=\sqrt{3}-1+2\sqrt{6}+2-\sqrt{3}-1$

$=2\sqrt{6}$．

20. 解方程组：$\begin{cases}x^2-3xy-4y^2=0① \\ x+2y=6② \end{cases}$．

【答案】$x=4$，$y=1$或者$x=-6$，$y=6$.

【解析】

【分析】本题考查了二元二次方程，求解一元二次方程，解题的关键是利用代入法进行求解.

【详解】解：$\begin{cases} x^2-3xy-4y^2=0① \\ x+2y=6② \end{cases}$，

由②得：$x=6-2y$代入①中得：

$(6-2y)^2-3(6-2y)y-4y^2=0$，

$(36-24y+4y^2)-18y+6y^2-4y^2=0$，

$6y^2-42y+36=0$，

$6(y^2-7y+6)=0$，

$6(y-6)(y-1)=0$

解得：$y=1$或$y=6$，

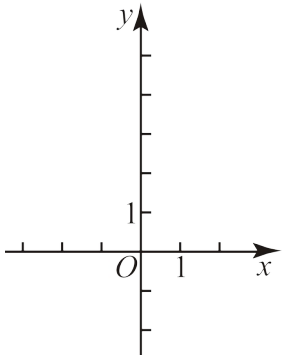
当$y=1$时，$x=6-2\times1=4$，

当$y=6$时，$x=6-2\times6=-6$，

∴方程组的解为$x=4,y=1$或者$x=-6,y=6$.

21. 在平面直角坐标系xOy中，反比例函数$y=\frac{k}{x}$（k为常数且$k\neq0$）上有一点$A(-3,m)$，且与直线

$y=-2x+4$交于另一点$B(n,6)$.



(1) 求 k 与 m 的值；

(2) 过点 A 作直线 $l \parallel x$ 轴与直线 $y=2x+4$ 交于点 C，求 $\sin\angle OCA$ 的值.

【答案】 (1) $k=-6$，$m=2$；

(2) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

【解析】

【分析】本题考查了反比例函数与一次函数，锐角三角函数，勾股定理等知识，解题的关键是：

(1) 把 B 的坐标代入 $y=-2x+4$，求出 n，然后把 B 的坐标代入 $y=\frac{k}{x}$，求出 k，最后把 A 的坐标代入 $y=\frac{k}{x}$ 求出 m 即可；

(2) 根据 $l \parallel x$ 轴求出 C 的纵坐标，然后代入 $y=-2x+4$，求出 C 的横坐标，利用勾股定理求出 OC，最后根据正弦的定义求解即可.

【小问 1 详解】

解：把 $B(n,6)$ 代入 $y=-2x+4$，

得 $6=-2n+4$，

解得 $n=-1$，

$\therefore B(-1,6)$，

把$B(-1,6)$代入$y=\frac{k}{x}$，

得$k=-1\times6=-6$，

$\therefore y=-\frac{6}{x}$，

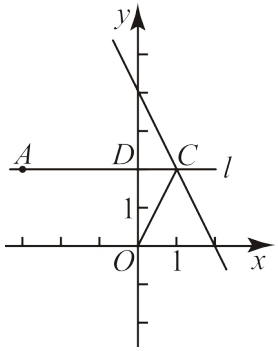
把$A(-3,m)$代入$y=-\frac{6}{x}$，

得$m=-\frac{6}{-3}=2$；

【小问2详解】

解：由（1）知：$A(-3,2)$

设l与y轴相交于D，



$\because l\parallel x$轴，x轴$\perp y$轴，

$\therefore A$、C、D的纵坐标相同，均为2，$\angle CDO=90^\circ$，

把$y=2$代入$y=-2x+4$，得$2=-2x+4$，

解得$x=1$，

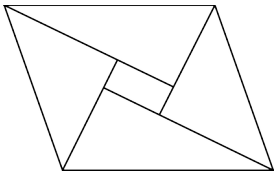
$\therefore C(1,2)$，

$\therefore CD=1$，$OD=2$，

$\therefore OC=\sqrt{CD^2+OD^2}=\sqrt{5}$，

$\therefore \sin\angle OCA=\dfrac{OD}{OC}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

22. 同学用两幅三角板拼出了如下的平行四边形，且内部留白部分也是平行四边形（直角三角板互不重叠），直角三角形斜边上的高都为h.



（1）求：

①两个直角三角形的直角边（结果用h表示）；

②小平行四边形的底、高和面积（结果用h表示）；

（2）请画出同学拼出的另一种符合题意的图，要求：

①不与给定的图形状相同；

②画出三角形的边.

【答案】（1）①等腰直角三角板直角边为$\sqrt{2}h$，含30°的直角三角形板直角边为$2h$和$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}h$；②底为$\left(2-\sqrt{2}\right)h$，高为$\dfrac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3}h$，面积为$\dfrac{6\sqrt{2}-6-4\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{3}h^2$；

（2）画图见解析.

【解析】

【分析】（1）①解直角三角形即可求解；

②由题意可知四边形$MNGH$是矩形，利用线段的和差可求出矩形的边长，进而可求出面积；

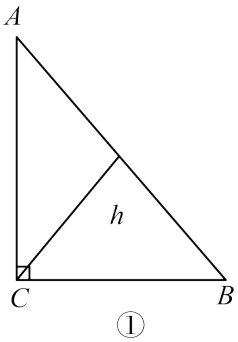
（2）根据题意画出图形即可；

本题考查了解直角三角形，矩形的判定，矩形的面积，图形设计，正确识图是解题的关键．

【小问 1 详解】

解：①如图①，$\triangle ABC$ 为等腰直角三角板，$\angle ACB=90^{\circ}$，

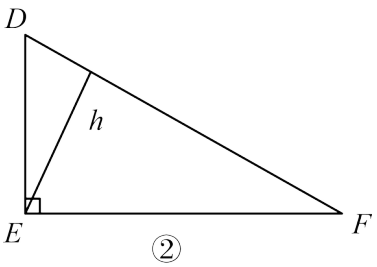
则 $AC=BC=\dfrac{h}{\sin 45^{\circ}}=\sqrt{2}h$；



①

如图 2，$\triangle DEF$ 为含 30° 的直角三角形板，$\angle DEF=90^{\circ}$，$\angle F=30^{\circ}$，$D=60^{\circ}$，

则 $EF=2h$，$DE=\dfrac{h}{\sin 60^{\circ}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}h$；



②

综上，等腰直角三角板直角边为 $\sqrt{2}h$，含 30° 的直角三角形板直角边为 $2h$ 和 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}h$；

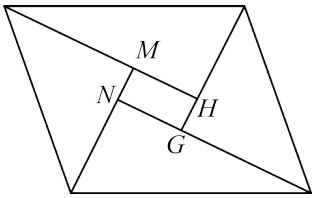
②由题意可知 $\angle MNG=\angle NGH=\angle GHM=\angle HMN=90^{\circ}$，

∴四边形 $MNGH$ 是矩形，

由图可得，$MN=\sqrt{2}h-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}h=\dfrac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3}h$，$MH=2h-\sqrt{2}h=\left(2-\sqrt{2}\right)h$，

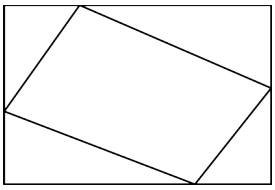
$\therefore S_{\text{矩形}EFGH}=MN\cdot MH=\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3}h\times\left(2-\sqrt{2}\right)h=\frac{6\sqrt{2}-6-4\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{3}h^2$，

故小平行四边形的底为$\left(2-\sqrt{2}\right)h$，高为$\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3}h$，面积为$\frac{6\sqrt{2}-6-4\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{3}h^2$；

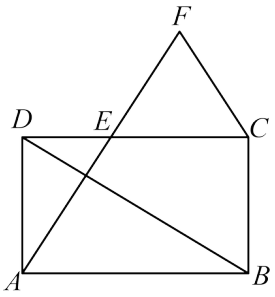


【小问 2 详解】

解：如图，即为所作图形．



23. 如图所示，在矩形$ABCD$中，E为边CD上一点，且$AE\perp BD$．



（1）求证：$AD^2=DE\cdot DC$；

（2）F为线段AE延长线上一点，且满足$EF=CF=\frac{1}{2}BD$，求证：$CE=AD$．

【答案】（1）证明见解析

（2）证明见解析

【解析】

【分析】（1）由矩形性质得到$\angle BAD=90^\circ$，$\angle ADE=90^\circ$，$AB=DC$，由角的互余得到$\angle ABD=\angle DAE$，从而确定$\triangle ADE\backsim\triangle BAD$，利用相似三角形性质得到$AD^2=DE\cdot DC$；

（2）由矩形性质，结合题中条件，利用等腰三角形的判定与性质得到$OA=OD=EF=CF$，

$\angle ODA=\angle OAD$，$\angle FEC=\angle FCE$，进而由三角形全等的判定与性质即可得到.

【小问1详解】

证明：在矩形$ABCD$中，$\angle BAD=90^\circ$，$\angle ADE=90^\circ$，$AB=DC$，

$\therefore \angle ABD+\angle ADB=90^\circ$，

$\because AE\perp BD$，

$\therefore \angle DAE+\angle ADB=90^\circ$，

$\therefore \angle ABD=\angle DAE$，

$\because \angle BAD=\angle ADE=90^\circ$，

$\therefore \triangle ADE\backsim\triangle BAD$，

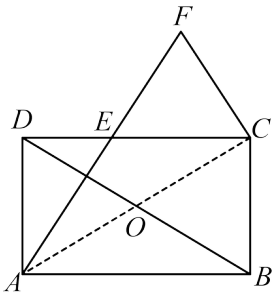
$\therefore \dfrac{AD}{BA}=\dfrac{DE}{AD}$，即$AD^2=DE\cdot BA$，

$\because AB=DC$，

$\therefore AD^2=DE\cdot DC$；

【小问2详解】

证明：连接AC交BD于点O，如图所示：



在矩形 $ABCD$ 中，$\angle ADE=90^{\circ}$，则 $\angle DAE+\angle AED=90^{\circ}$，

$\because AE\perp BD$，

$\therefore \angle DAE+\angle ADB=90^{\circ}$，

$\therefore \angle ADB=\angle AED$，

$\because \angle FEC=\angle AED$，

$\therefore \angle ADO=\angle FEC$，

在矩形 $ABCD$ 中，$OA=OD=\frac{1}{2}BD$，

$\because EF=CF=\frac{1}{2}BD$，

$\therefore OA=OD=EF=CF$，

$\therefore \angle ADO=\angle OAD$，$\angle FEC=\angle FCE$，

$\because \angle ADO=\angle FEC$，

$\therefore \angle ADO=\angle OAD=\angle FEC=\angle FCE$，

在 $\triangle ODA$ 和 $\triangle FEC$ 中，

$$\begin{cases}\angle ODA=\angle FEC\\ \angle OAD=\angle FCE\\ OD=FE\end{cases}$$

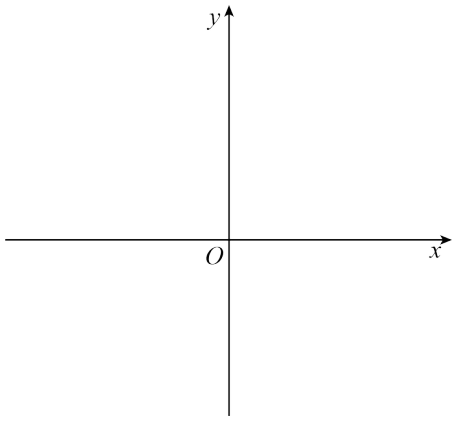
$\therefore \triangle ODA\cong\triangle FEC(\mathrm{AAS})$，

$\therefore CE=AD$.

【点睛】本题考查矩形综合，涉及矩形性质、相似三角形的判定与性质、等腰三角形的判定与性质、全等

三角形的判定与性质等知识，熟练掌握相关几何性质与判定是解决问题第的关键．

24. 在平面直角坐标系中，已知平移抛物线$y=\frac{1}{3}x^2$后得到的新抛物线经过$A\left(0,-\frac{5}{3}\right)$和$B(5,0)$．



（1）求平移后新抛物线的表达式；

（2）直线$x=m$（$m>0$）与新抛物线交于点P，与原抛物线交于点Q．

① 如果PQ小于3，求m的取值范围；

② 记点P在原抛物线上的对应点为P'，如果四边形$P'BPQ$有一组对边平行，求点P的坐标．

【答案】（1）$y=\frac{1}{3}(x-2)^2-3$或$y=\frac{1}{3}x^2-\frac{4}{3}x-\frac{5}{3}$；

（2）①$0<m<1$；②$P\left(7,\frac{16}{3}\right)$．

【解析】

【分析】（1）设平移抛物线$y=\frac{1}{3}x^2$后得到的新抛物线为$y=\frac{1}{3}x^2+bx+c$，把$A\left(0,-\frac{5}{3}\right)$和$B(5,0)$代入可得答案；

（2）①如图，设$Q\left(x,\frac{1}{3}x^2\right)$，则$P\left(x,\frac{1}{3}x^2-\frac{4}{3}x-\frac{5}{3}\right)$，$PQ=\frac{4}{3}x+\frac{5}{3}$，结合$PQ$小于3，可得

$\frac{4}{3}x+\frac{5}{3}<3$，结合$x=m(m>0)$，从而可得答案；②先确定平移方式为，向右平移2个单位，向下平移3

个单位，由题意可得：P在B的右边，当$BP' \parallel PQ$时，可得$P'\left(5,\frac{25}{3}\right)$，结合平移的性质可得答案如图，

当$P'Q \parallel BP$时，则$\angle P'QT=\angle BPT$，过P'作$P'S \perp QP$于S，证明$\triangle P'SQ \backsim \triangle BTP$，可得$\frac{QS}{P'S}=\frac{PT}{BT}$，

设$P'\left(x,\frac{1}{3}x^2\right)$，则$P\left(x+2,\frac{1}{3}x^2-3\right)$，$S\left(x+2,\frac{1}{3}x^2\right)$，$Q\left[x+2,\frac{1}{3}(x+2)^2\right]$，再建立方程求解即可.

【小问1详解】

解：设平移抛物线$y=\frac{1}{3}x^2$后得到的新抛物线为$y=\frac{1}{3}x^2+bx+c$，

把$A\left(0,-\frac{5}{3}\right)$和$B(5,0)$代入可得：

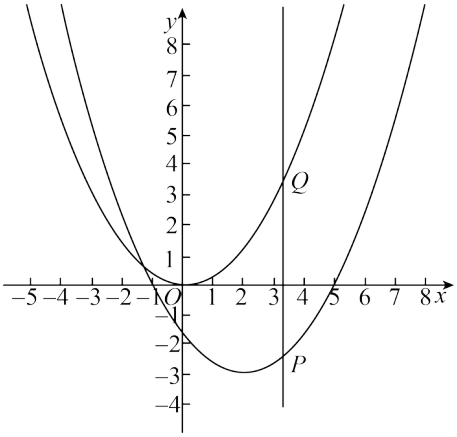
$$\begin{cases}c=-\frac{5}{3}\\ \frac{25}{3}+5b+c=0\end{cases}$$，

解得：$\begin{cases}b=-\frac{4}{3}\\ c=-\frac{5}{3}\end{cases}$，

∴新抛物线为$y=\frac{1}{3}x^2-\frac{4}{3}x-\frac{5}{3}$；

【小问2详解】

解：①如图，设$Q\left(x,\frac{1}{3}x^2\right)$，则$P\left(x,\frac{1}{3}x^2-\frac{4}{3}x-\frac{5}{3}\right)$，



∴ $PQ=\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}x^2+\frac{4}{3}x+\frac{5}{3}=\frac{4}{3}x+\frac{5}{3}$，

∵ PQ 小于 3，

∴ $\frac{4}{3}x+\frac{5}{3}<3$，

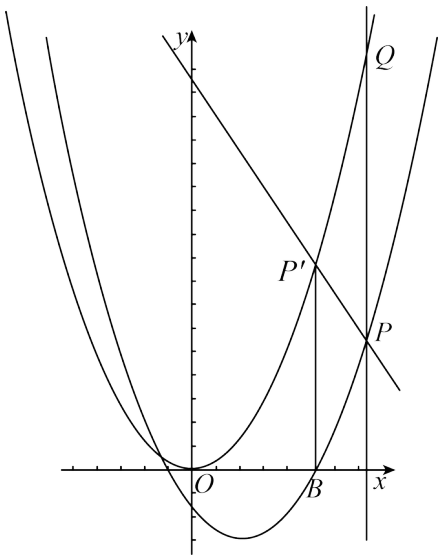
∴ $x<1$，

∵ $x=m(m>0)$，

∴ $0<m<1$；

②∵ $y=\frac{1}{3}x^2-\frac{4}{3}x-\frac{5}{3}=\frac{1}{3}(x-2)^2-3$，

∴平移方式为，向右平移 2 个单位，向下平移 3 个单位，



由题意可得：P在B的右边，当$BP' \parallel PQ$时，

$\therefore BP' \perp x$轴，

$\therefore x_{P'} = x_B = 5$，

$\therefore P'\left(5, \frac{25}{3}\right)$，

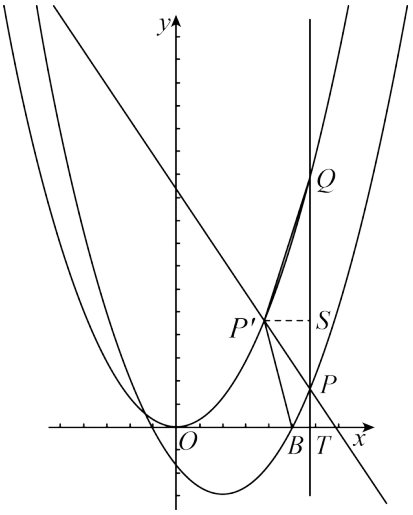
由平移的性质可得：$P\left(5+2, \frac{25}{3}-3\right)$，即$P\left(7, \frac{16}{3}\right)$；

如图，当$P'Q \parallel BP$时，则$\angle P'QT = \angle BPT$，

过P'作$P'S \perp QP$于S，

$\therefore \angle P'SQ = \angle BTP = 90^\circ$，

$\therefore \triangle P'SQ \backsim \triangle BTP$，



$\therefore \dfrac{QS}{P'S}=\dfrac{PT}{BT}$，

设 $P'\left(x,\dfrac{1}{3}x^2\right)$，则 $P\left(x+2,\dfrac{1}{3}x^2-3\right)$，$S\left(x+2,\dfrac{1}{3}x^2\right)$，$Q\left[x+2,\dfrac{1}{3}(x+2)^2\right]$，

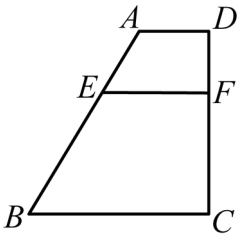
$\therefore \dfrac{\frac{1}{3}(x+2)^2-\frac{1}{3}x^2}{2}=\dfrac{\frac{1}{3}x^2-3}{x+2-5}$，

解得：$x=1$（不符合题意舍去）；

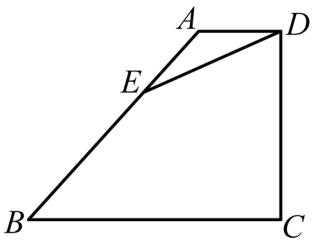
综上：$P\left(7,\dfrac{16}{3}\right)$；

【点睛】本题属于二次函数的综合题，抛物线的平移，利用待定系数法求解二次函数的解析式，二次函数的图象与性质，相似三角形的判定与性质，熟练的利用数形结合的方法解题是关键.

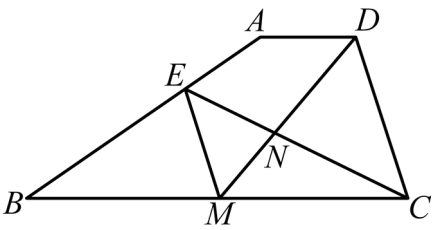
25. 梯形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，点 E 在边 AB 上，且 $AE=\dfrac{1}{3}AB$.



（图1）



（图2）



（图3）

(1) 如图 1 所示，点 F 在边 CD 上，且 $DF=\frac{1}{3}CD$，联结 EF，求证：$EF\parallel BC$；

(2) 已知 $AD=AE=1$；

① 如图 2 所示，联结 DE，如果 $\triangle ADE$ 外接圆的心恰好落在 $\angle B$ 的平分线上，求 $\triangle ADE$ 的外接圆的半径长；

② 如图 3 所示，如果点 M 在边 BC 上，联结 EM、DM、EC，DM 与 EC 交于 N，如果 $BC=4$，且 $CD^2=DM\cdot DN$，$\angle DMC=\angle CEM$，求边 CD 的长.

【答案】 (1) 见详解　(2) ①$\frac{\sqrt{6}}{2}$；②$\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 (1) 延长 DE,CB 交于点 G，由 $AD\parallel BC$，得到 $\frac{AE}{EB}=\frac{DE}{EG}$，由已知数据得到 $\frac{AE}{EB}=\frac{1}{2}$，

$\frac{DF}{FC}=\frac{1}{2}$，故 $\frac{DE}{EG}=\frac{DF}{FC}$，因此 $EF\parallel BC$；

(2) ①记点 O 为 $\triangle ADE$ 外接圆圆心，过点 O 作 $OF\perp AE$ 于点 F，连接 OA,OE,OD，先证明

$\angle AOB=90^\circ$，再证明 $\triangle FAO\backsim\triangle OAB$，则 $AO^2=AF\cdot AB$，即 $AO^2=\frac{3}{2}$，求得 $AO=\frac{\sqrt{6}}{2}$；

② 延长 BA,CD 交于点 P，过点 E 作 $EQ\perp BC$，垂足为点 Q，由 $\triangle PAD\backsim\triangle PBC$，求得 $PA=1$，可证明

$\triangle DCN\backsim\triangle DCM$，角度推导得 $EM\parallel DC$，则 $\frac{BE}{EP}=\frac{BM}{MC}$，求出 $BE=2$，继而得到 $BM=MC=2$，

由 $\triangle BEM\backsim\triangle BPC$，则 $\frac{BM}{BC}=\frac{ME}{PC}=\frac{1}{2}$，设 $ME=2a$，则 $PC=4a$，由 $AD\parallel BC$，设 $PD=a$，

$DC=3a$，由$\triangle ENM\backsim\triangle CND$，得到$\frac{EN}{CN}=\frac{EM}{DC}=\frac{2}{3}$，设$EN=2b,CN=3b$，可证明

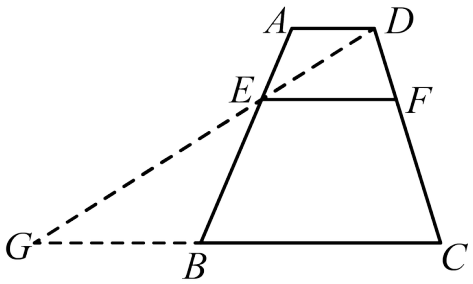
$\triangle CNM\backsim\triangle CME$，求出$b=\frac{2}{15}\sqrt{15}$，则$CE=\frac{2}{3}\sqrt{15}$，在$\mathrm{Rt}\triangle BQE,\mathrm{Rt}\triangle CQE$中，运用勾股定理得：

$4-BQ^2=\left(\frac{2}{3}\sqrt{15}\right)^2-(4-BQ)^2$，则$BQ=\frac{5}{3}$，在$\mathrm{Rt}\triangle EQM$中，由勾股定理得，

$EM=\sqrt{EQ^2+QM^2}=\frac{2}{3}\sqrt{3}$，故$DC=\sqrt{3}$.

【小问1详解】

证明：延长DE,CB交于点G，



$\because AD\parallel BC$，

$\therefore\frac{AE}{EB}=\frac{DE}{EG}$，

$\because AE=\frac{1}{3}AB$，$DF=\frac{1}{3}CD$

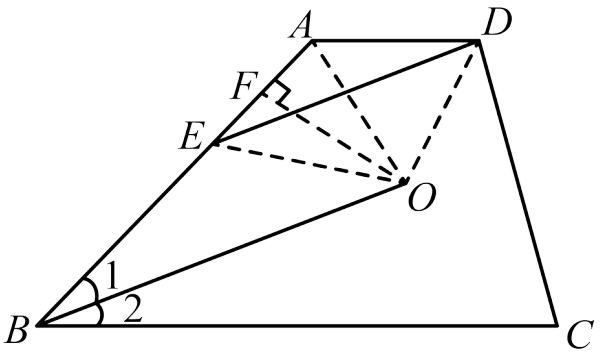
$\therefore\frac{AE}{EB}=\frac{1}{2}$，$\frac{DF}{FC}=\frac{1}{2}$，

$\therefore\frac{DE}{EG}=\frac{DF}{FC}$，

$\therefore EF \parallel BC$；

【小问 2 详解】

① 解：记点 O 为 $\triangle ADE$ 外接圆圆心，过点 O 作 $OF \perp AE$ 于点 F，连接 OA, OE, OD，



$\because$ 点 O 为 $\triangle ADE$ 外接圆圆心，

$\therefore OA = OE = OD$，

$\therefore AF = EF = \frac{1}{2}$，

$\because AE = \frac{1}{3} AB$，

$\therefore AB = 3$，

$\because AE = AD, OE = OD, OA = OA$，

$\therefore \triangle AEO \cong \triangle ADO$，

$\therefore \angle EAO = \angle DAO$，

$\because BO$ 平分 $\angle ABC$，

$\therefore \angle 1 = \angle 2$，

$\because AD \parallel BC$，

$\therefore \angle DAB+\angle ABC=180^{\circ}$，

$\therefore 2\angle EAO+2\angle 1=180^{\circ}$，

$\therefore \angle EAO+\angle 1=90^{\circ}$，

$\therefore \angle AOB=90^{\circ}$，

$\because OF\perp AE$，

$\therefore \angle AFO=\angle AOB=90^{\circ}$，

$\because \angle FAO=\angle OAB$，

$\therefore \triangle FAO\backsim\triangle OAB$，

$\therefore \dfrac{AO}{AB}=\dfrac{FA}{AO}$，

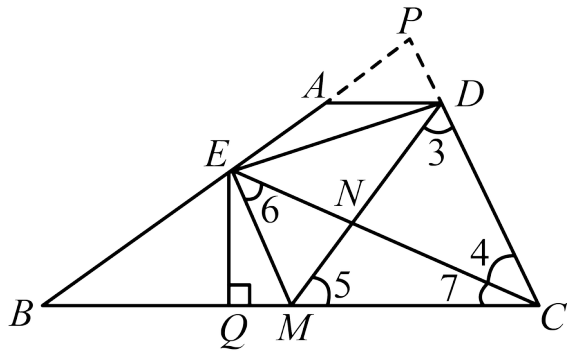
即 $AO^2=AF\cdot AB$，

$\therefore AO^2=\dfrac{1}{2}\times 3=\dfrac{3}{2}$，

$\therefore AO=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，

$\therefore$ V ADE 外接圆半径为 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$；

② 延长 BA,CD 交于点 P，过点 E 作 $EQ\perp BC$，垂足为点 Q，



$\because AD \parallel BC$，

$\therefore \triangle PAD \backsim \triangle PBC$，

$\therefore \dfrac{PA}{PB}=\dfrac{AD}{BC}=\dfrac{1}{4}$，

由①知 $AB=3$，

$\therefore \dfrac{PA}{PA+3}=\dfrac{1}{4}$，

$\therefore PA=1$，

$\because CD^2=DM\cdot DN$，

$\therefore \dfrac{CD}{DM}=\dfrac{DN}{CD}$，

$\because \angle 3=\angle 3$，

$\therefore \triangle DCN \backsim \triangle DMC$，

$\therefore \angle 4=\angle 5$，

$\because \angle 5=\angle 6$，

$\therefore \angle 4=\angle 6$，

$\therefore EM \parallel DC$，

$\therefore \frac{BE}{EP}=\frac{BM}{MC}$，

由 $AB=3$，$AE=1$

得 $BE=2$，

$\therefore \frac{BE}{EP}=1$，

$\therefore \frac{BM}{MC}=1$，

$\therefore BM=MC=2$，

$\because EM \parallel DC$，

$\therefore \triangle BEM \sim \triangle BPC$，

$\therefore \frac{BM}{BC}=\frac{ME}{PC}=\frac{1}{2}$，

设 $ME=2a$，则 $PC=4a$，

$\because AD \parallel BC$，

$\therefore \frac{PD}{PC}=\frac{PA}{PB}=\frac{1}{4}$，

$\therefore PD=a$，

$\therefore DC=3a$，

$\because EM \parallel DC$，

$\therefore \triangle ENM \backsim \triangle CND$，

$\therefore \dfrac{EN}{CN}=\dfrac{EM}{DC}=\dfrac{2}{3}$，

$\therefore$设 $EN=2b, CN=3b$，

$\because \angle 5=\angle 6$，$\angle 7=\angle 7$，

$\therefore \triangle CNM \backsim \triangle CME$，

$\therefore \dfrac{CN}{CM}=\dfrac{CM}{CE}$，

即 $CM^2=CN\cdot CE$，

$\therefore 4=3b\cdot 5b$，

解得：$b=\dfrac{2}{15}\sqrt{15}$，

$\therefore CE=\dfrac{2}{3}\sqrt{15}$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle BQE, \mathrm{Rt}\triangle CQE$ 中，由勾股定理得：

$BE^2-BQ^2=CN^2-CQ^2$，

$\therefore 4-BQ^2=\left(\dfrac{2}{3}\sqrt{15}\right)^2-(4-BQ)^2$，

$\therefore BQ=\dfrac{5}{3}$，

$\therefore EQ^2=BE^2-BQ^2=\dfrac{11}{9}$，

而 $QM = BM - BQ = 2 - \frac{5}{3} = \frac{1}{3}$，

∴在 $\mathrm{Rt}\triangle EQM$ 中，由勾股定理得，$EM = \sqrt{EQ^2 + QM^2} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$，

$\because \frac{EM}{DC} = \frac{2}{3}$，

$\therefore DC = \sqrt{3}$.

【点睛】本题考查了平行线分线段成比例定理，相似三角形的判定与性质，勾股定理，三角形的外接圆等知识点，熟练掌握知识点，正确添加辅助线是解题的关键.