2023年上海市初中学业水平考试

考生注意：

1. 本场考试时间100分钟，试卷共4页，满分150分，答题纸共2页．

2. 作答前，在答题纸指定位置填写姓名、报名号、座位号．将核对后的条形码贴在答题纸指定位置．

3. 所有作答务必填涂或书写在答题纸上与试卷题号对应的区域，不得错位．在试卷上的作答一律不得分．

4. 选择题和作图题用2*B*铅笔作答，其余题型用黑色字迹钢笔、水笔或圆珠笔作答．

一、选择题：（本大题共6题，每题4分，共24分）【下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题卡的相应位置上】

1. 下列运算正确的是（　）

A. $a^5\div a^2=a^3$　　B. $a^3+a^3=a^6$　　C. $(a^3)^2=a^5$　　D. $\sqrt{a^2}=a$

【答案】A

【解析】

【分析】根据同底数幂的除法，合并同类项，幂的乘方，二次根式的化简等计算即可．

【详解】解：A、$a^5\div a^2=a^3$，故正确，符合题意；

B、$a^3+a^3=2a^3$，故错误，不符合题意；

C、$(a^3)^2=a^6$，故错误，不符合题意；

D、$\sqrt{a^2}=|a|$，故错误，不符合题意；

故选：A．

【点睛】本题考查了同底数幂的除法，合并同类项，幂的乘方，二次根式的化简，熟练掌握幂的运算法则是解题的关键．

2. 在分式方程$\frac{2x-1}{x^2}+\frac{x^2}{2x-1}=5$中，设$\frac{2x-1}{x^2}=y$，可得到关于$y$的整式方程为（　）

A. $y^2+5y+5=0$　　B. $y^2-5y+5=0$　　C. $y^2+5y+1=0$　　D. $y^2-5y+1=0$

【答案】D

【解析】

【分析】设$\frac{2x-1}{x^2}=y$，则原方程可变形为$y+\frac{1}{y}=5$，再化为整式方程即可得出答案.

【详解】解：设$\frac{2x-1}{x^2}=y$，则原方程可变形为$y+\frac{1}{y}=5$，

即$y^2-5y+1=0$；

故选：D.

【点睛】本题考查了利用换元法解方程，正确变形是关键，注意最后要化为整式方程.

3. 下列函数中，函数值y随x的增大而减小的是（　）

A. $y=6x$　　B. $y=-6x$　　C. $y=\frac{6}{x}$　　D. $y=-\frac{6}{x}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据一次函数和反比例函数的性质，逐项分析即可得到答案.

【详解】解：A、$y=6x$，$k=6>0$，y随x的增大而增大，不符合题意；

B、$y=-6x$，$k=-6<0$，y随x的增大而减小，符合题意；

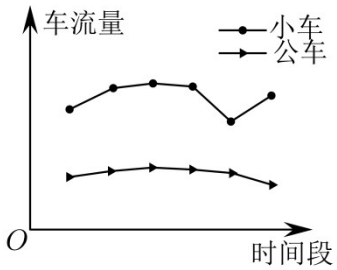
C、$y=\frac{6}{x}$，$k=6>0$，在每个象限内，y随x的增大而减小，不符合题意；

D、$y=-\frac{6}{x}$，$k=-6<0$，在每个象限内，y随x的增大而增大，不符合题意；

故选：B．

【点睛】本题主要考查了一次函数、反比例函数的性质，熟练掌握函数的性质，是解题的关键．

4. 如图所示，为了调查不同时间段的车流量，某学校的兴趣小组统计了不同时间段的车流量，下图是各时间段的小车与公车的车流量，则下列说法正确的是（　）



A. 小车的车流量比公车的车流量稳定；　　B. 小车的车流量的平均数较大；

C. 小车与公车车流量在同一时间段达到最小值；　　D. 小车与公车车流量的变化趋势相同．

【答案】B

【解析】

【分析】根据折线统计图逐项判断即可得．

【详解】解：A、小车的车流量不稳定，公车的车流量较为稳定，则此项错误，不符合题意；

B、小车的车流量的平均数较大，则此项正确，符合题意；

C、小车车流量达到最小值的时间段早于公车车流量，则此项错误，不符合题意；

D、小车车流量的变化趋势是先增加、再减小、又增加；大车车流量的变化趋势是先增加、再减小，则此项错误，不符合题意；

故选：B．

【点睛】本题考查了折线统计图，读懂折线统计图是解题关键．

5. 在四边形$ABCD$中，$AD\parallel BC,AB=CD$．下列说法能使四边形$ABCD$为矩形的是（　）

A. $AB\parallel CD$　　B. $AD=BC$　　C. $\angle A=\angle B$　　D. $\angle A=\angle D$

【答案】C

【解析】

【分析】结合平行四边形的判定和性质及矩形的判定逐一分析即可．

【详解】A：$\because AB\parallel CD$，$AD\parallel BC,AB=CD$

$\therefore ABCD$为平行四边形而非矩形

故A不符合题意

B：$\because AD=BC$，$AD\parallel BC,AB=CD$

$\therefore ABCD$为平行四边形而非矩形

故B不符合题意

C：$\because AD\parallel BC$

$\therefore \angle A+\angle B=180^\circ$

$\because \angle A=\angle B$

$\therefore \angle A=\angle B=90^\circ$

$\because AB=CD$

$\therefore ABCD$为矩形

故C符合题意

D：$\because AD\parallel BC$

$\therefore \angle A+\angle B=180^\circ$

$\because \angle A=\angle D$

$\therefore \angle D+\angle B=180^\circ$

$\therefore ABCD$不是平行四边形也不是矩形

故D不符合题意

故选：C．

【点睛】本题主要考查平行线的性质，平行四边形的判定和性质及矩形的判定等知识，熟练掌握以上知识并灵活运用是解题的关键．

6. 已知在梯形$ABCD$中，连接$AC,\ BD$，且$AC\perp BD$，设$AB=a,CD=b$．下列两个说法：

①$AC=\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$；②$AD=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2+b^2}$

则下列说法正确的是（　）

A. ① 正确②错误　　B. ① 错误②正确　　C. ①② 均正确　　D. ①② 均错误

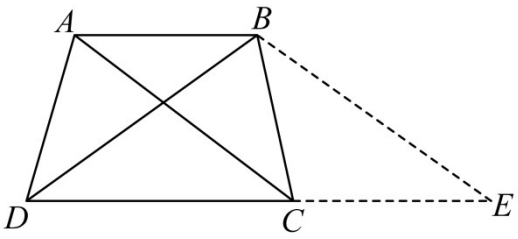
【答案】D

【解析】

【分析】根据已知及结论，作出图形，进而可知当梯形$ABCD$为等腰梯形，即$AD=BC$，$AB\parallel CD$时，

①$AC=\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$；②$AD=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2+b^2}$，其余情况得不出这样的结论，从而得到答案.

【详解】解：过B作$BE\parallel CA$，交BC延长线于E，如图所示：



若梯形$ABCD$为等腰梯形，即$AD=BC$，$AB\parallel CD$时，

$\therefore$四边形$ACEB$是平行四边形，

$\therefore CE=AB, AC=BE$，

$\because AB\parallel DC$，

$\therefore\angle DAB=\angle CBA$，

$Q\ AB=AB$，

$\therefore\triangle DAB\cong\triangle CBA(\mathrm{SAS})$

$\therefore AC=BD$，即$BD=BE$，

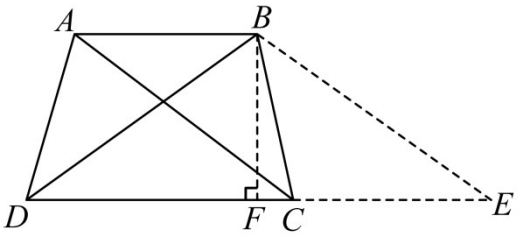
又$\because AC\perp BD$，

$\therefore BE\perp BD$，

在$\mathrm{Rt}\triangle BDE$中，$BD=BE$，$AB=a,CD=b$，则$DE=DC+CE=b+a$，

$\therefore AC=BE=\frac{DE}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}DE=\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$，此时①正确；

过B作$BF\perp DE$于F，如图所示：



在$\mathrm{Rt}\triangle BFC$中，$BD=BE$，$AB=a,CD=b$，$DE=b+a$，则$BF=FE=\frac{1}{2}DE=\frac{1}{2}(a+b)$，

$FC=FE-CE=\frac{1}{2}(a+b)-a=\frac{1}{2}(b-a)$，

$\therefore BC=\sqrt{BF^2+FC^2}=\sqrt{\left[\frac{(a+b)}{2}\right]^2+\left[\frac{(b-a)}{2}\right]^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2+b^2}$，此时②正确；

而题中，梯形$ABCD$是否为等腰梯形，并未确定；梯形$ABCD$是$AB\parallel CD$还是$AD\parallel BC$，并未确定，

∴无法保证①②正确，

故选：D．

【点睛】本题考查梯形中求线段长，涉及梯形性质、平行四边形的判定与性质、全等三角形的判定性质、勾股定理、等腰直角三角形的判定与性质等知识，熟练掌握相关几何判定与性质是解决问题的关键．

二、填空题：（本大题共 12 题，每题 4 分，共 48 分）【请将结果直接填入答题纸的相应位置上】

7. 分解因式：$n^2-9=$_____．

【答案】$(n-3)(n+3)$

【解析】

【分析】利用平方差公式进行因式分解即可.

【详解】解：$n^2-9=(n-3)(n+3)$，

故答案为：$(n-3)(n+3)$.

【点睛】本题考查因式分解，熟练掌握平方差公式是解题的关键.

8. 化简：$\frac{2}{1-x}-\frac{2x}{1-x}$ 结果为_____.

【答案】2

【解析】

【分析】根据同分母分式的减法计算法则解答即可.

【详解】解：$\frac{2}{1-x}-\frac{2x}{1-x}=\frac{2-2x}{1-x}=\frac{2(1-x)}{1-x}=2$；

故答案为：2.

【点睛】本题考查了同分母分式减法计算，熟练掌握运算法则是解题关键.

9. 已知关于x的方程$\sqrt{x-14}=2$，则$x=$_____

【答案】18

【解析】

【分析】根据二次根式的性质，等式两边平方，解方程即可.

【详解】解：根据题意得，$x-14\geq 0$，即$x\geq 14$，

$\sqrt{x-14}=2$，

等式两边分别平方，$x-14=4$

移项，$x=18$，符合题意，

故答案 ：18.

【点睛】本题主要考查二次根式与方程的综合，掌握含二次根式的方程的解法是解题的关键.

10. 函数 $f(x)=\frac{1}{x-23}$ 的定义域为_____.

【答案】 $x\neq 23$

【解析】

【分析】根据分式有意义的条件可进行求解.

【详解】解：由 $f(x)=\frac{1}{x-23}$ 可知： $x-23\neq 0$，

$\therefore x\neq 23$；

故答案为 $x\neq 23$.

【点睛】本题主要考查函数及分式有意义的条件，熟练掌握函数的概念及分式有意义的条件是解题的关键.

11. 已知关于 x 的一元二次方程 $ax^2+6x+1=0$ 没有实数根，那么 a 的取值范围是_____.

【答案】 $a>9$

【解析】

【分析】根据一元二次方程根的判别式可进行求解.

【详解】解：∵关于 x 的一元二次方程 $ax^2+6x+1=0$ 没有实数根，

$\therefore \Delta=b^2-4ac=36-4a<0$，

解得： $a>9$；

故答案为： $a>9$.

【点睛】本题主要考查一元二次方程根的判别式，熟练掌握一元二次方程根的判别式是解题的关键.

12. 在不透明的盒子中装有一个黑球，两个白球，三个红球，四个绿球，这十个球除颜色外完全相同．那么从中随机摸出一个球是绿球的概率为_____.

【答案】 $\frac{2}{5}$

【解析】

【分析】根据简单事件的概率公式计算即可得.

【详解】解：因为在不透明的盒子中，总共有 10 个球，其中有四个绿球，并且这十个球除颜色外，完全相同，

所以从中随机摸出一个球是绿球的概率为 $P=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$，

故答案为：$\frac{2}{5}$.

【点睛】本题考查了求概率，熟练掌握概率公式是解题关键.

13. 如果一个正多边形的中心角是 20°，那么这个正多边形的边数为_____.

【答案】18

【解析】

【分析】根据正 n 边形的中心角的度数为 $360^{\circ}\div n$ 进行计算即可得到答案.

【详解】根据正 n 边形的中心角的度数为 $360^{\circ}\div n$，

则 $n=360\div 20=18$，

故这个正多边形的边数为 18，

故答案为：18.

【点睛】本题考查的是正多边形内角和中心角的知识，掌握中心角的计算公式是解题的关键.

14. 一个二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的顶点在 y 轴正半轴上，且其对称轴左侧的部分是上升的，那么这个二次函数的解析式可以是_____.

【答案】 $y=-x^2+1$ （答案不唯一）

【解析】

【分析】根据二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的顶点在 y 轴正半轴上，且其对称轴左侧的部分是上升的，可确定 $a<0$，对称轴 $x=-\frac{b}{2a}=0$，$c>0$，从而确定答案.

【详解】解：∵二次函数$y=ax^2+bx+c$的对称轴左侧的部分是上升的，

∴抛物线开口向上，即$a<0$，

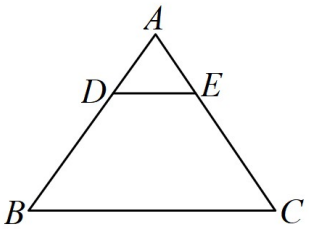
∵二次函数$y=ax^2+bx+c$的顶点在y轴正半轴上，

∴$-\frac{b}{2a}=0$，即$b=0$，$c>0$，

∴二次函数的解析式可以是$y=-x^2+1$（答案不唯一）．

【点睛】本题考查二次函数的性质，能根据增减性和二次函数图象与y轴的交点确定系数的正负是解题的关键．

15. 如图，在$\triangle ABC$中，点D，E在边AB，AC上，$2AD=BD, DE\parallel BC$，联结DE，设向量$AB=a$，$AC=b$，那么用a，b表示$DE=$_____．



【答案】$\frac{1}{3}\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{a}$

【解析】

【分析】先根据向量的减法可得$BC=b-a$，再根据相似三角形的判定可得$\triangle ADE\sim\triangle ABC$，根据相似三角形的性质可得$DE=\frac{1}{3}BC$，由此即可得．

【详解】解：∵向量$AB=a$，$AC=b$，

∴$BC=AC-AB=b-a$，

$\because 2AD = BD$，

$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{1}{3}$，

$\because DE \parallel BC$，

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$，

$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{3}$，

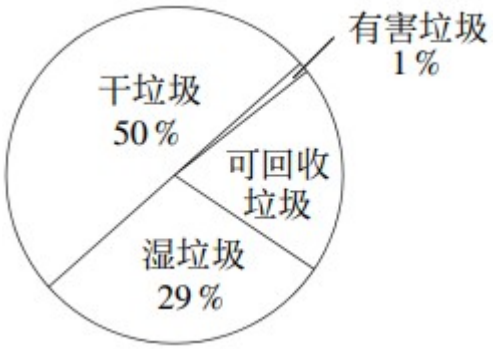
$\therefore DE = \frac{1}{3}BC$，

$\therefore DE = \frac{1}{3}BC = \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a}$，

故答案为：$\frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a}$．

【点睛】本题考查了向量的运算、相似三角形的判定与性质，熟练掌握向量的运算是解题关键．

16. 垃圾分类（*Refuse sorting*），是指按照垃圾的不同成分、属性、利用价值以及对环境的影响，并根据不同处置方式的要求，分成属性不同的若干种类．某市试点区域的垃圾收集情况如扇形统计图所示，已知可回收垃圾共收集 60 吨，且全市人口约为试点区域人口的 10 倍，那么估计全市可收集的干垃圾总量为_____．



【答案】1500 吨

【解析】

【分析】由题意易得试点区域　垃圾收集总量为 300 吨，然后问题可求解．

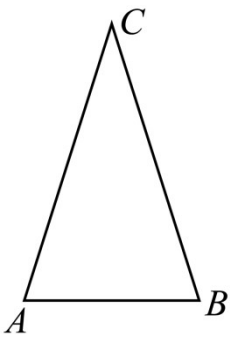
【详解】解：由扇形统计图可得试点区域的垃圾收集总量为 $60\div(1-50\%-1\%-29\%)=300$（吨），

∴全市可收集　干垃圾总量为 $300\times50\%\times10=1500$（吨）；

故答案为 1500 吨．

【点睛】本题主要考查扇形统计图，熟练掌握扇形统计图是解题的关键．

17. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=35^\circ$，将 $\triangle ABC$ 绕着点 A 旋转 $\alpha(0^\circ<\alpha<180^\circ)$，旋转后的点 B 落在 BC 上，点 B 的对应点为 D，连接 AD，AD 是 $\angle BAC$ 的角平分线，则 $\alpha=$_____．



【答案】$\left(\frac{110}{3}\right)^\circ$．

【解析】

【分析】如图，$AB=AD$，$\angle BAD=\alpha$，根据角平分线的定义可得 $\angle CAD=\angle BAD=\alpha$，根据三角形的外角性质可得 $\angle ADB=35^\circ+\alpha$，即得 $\angle B=\angle ADB=35^\circ+\alpha$，然后根据三角形的内角和定理求解即可．

【详解】解：如图，根据题意可得：$AB=AD$，$\angle BAD=\alpha$，

∵ AD 是 $\angle BAC$ 的角平分线，

∴ $\angle CAD=\angle BAD=\alpha$，

∵ $\angle ADB=\angle C+\angle CAD=35^\circ+\alpha$，$AB=AD$，

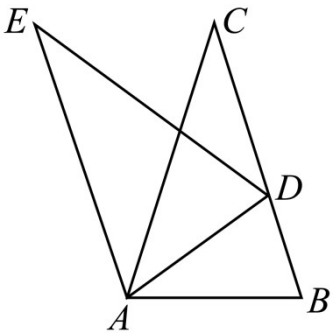
$\therefore \angle B=\angle ADB=35^{\circ}+\alpha$，

则在 $\triangle ABC$ 中，$\because \angle C+\angle CAB+\angle B=180^{\circ}$，

$\therefore 35^{\circ}+2\alpha+35^{\circ}+\alpha=180^{\circ}$，

解得：$\alpha=\left(\frac{110}{3}\right)^{\circ}$；

故答案为：$\left(\frac{110}{3}\right)^{\circ}$



【点睛】本题考查了旋转的性质、等腰三角形的性质、三角形的外角性质以及三角形的内角和等知识，熟练掌握相关图形的性质是解题的关键．

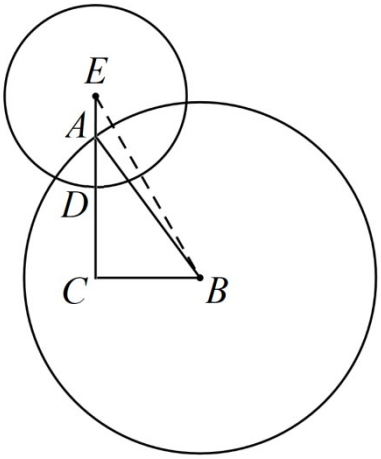
18. 在 $\triangle ABC$ 中 $AB=7, BC=3, \angle C=90^{\circ}$，点 D 在边 AC 上，点 E 在 CA 延长线上，且 $CD=DE$，如果 $\odot B$ 过点 A，$\odot E$ 过点 D，若 $\odot B$ 与 $\odot E$ 有公共点，那么 $\odot E$ 半径 r 的取值范围是_____．

【答案】$\sqrt{10}<r\leq 2\sqrt{10}$

【解析】

【分析】先画出图形，连接 BE，利用勾股定理可得 $BE=\sqrt{9+4r^2}$，$AC=2\sqrt{10}$，从而可得 $\sqrt{10}<r\leq 2\sqrt{10}$，再根据 $\odot B$ 与 $\odot E$ 有公共点可得一个关于 r 的不等式组，然后利用二次函数的性质求解即可得．

【详解】解：由题意画出图形如下：连接 BE，



$\because \odot B$ 过点 A，且 $AB=7$，

$\therefore$ e B 的半径为 7，

$\odot E$ 过点 D，它的半径为 r，且 $CD=DE$，

$\therefore CE=CD+DE=2r$，

$\because BC=3,\angle C=90^\circ$，

$\therefore BE=\sqrt{BC^2+CE^2}=\sqrt{9+4r^2}$，$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=2\sqrt{10}$，

$\because D$ 在边 AC 上，点 E 在 CA 延长线上，

$\therefore \begin{cases} CD \le AC \\ CE > AC \end{cases}$，即 $\begin{cases} r \le 2\sqrt{10} \\ 2r > 2\sqrt{10} \end{cases}$，

$\therefore \sqrt{10} < r \le 2\sqrt{10}$，

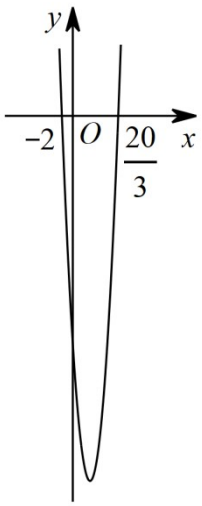
$\because \odot B$ 与 $\odot E$ 有公共点，

$\therefore AB-DE \le BE \le AB+DE$，即 $\begin{cases} \sqrt{9+4r^2} \le 7+r① \\ 7-r \le \sqrt{9+4r^2}② \end{cases}$，

不等式①可化为 $3r^2-14r-40 \le 0$，

解方程$3r^2-14r-40=0$得：$r=-2$或$r=\frac{20}{3}$，

画出函数$y=3r^2-14r-40$的大致图象如下：



由函数图象可知，当$y\le 0$时，$-2\le r\le\frac{20}{3}$，

即不等式①的解集为$-2\le r\le\frac{20}{3}$，

同理可得：不等式②的解集为$r\ge 2$或$r\le-\frac{20}{3}$，

则不等式组的解集为$2\le r\le\frac{20}{3}$，

又$\sqrt{10}<r\le 2\sqrt{10}$，

半径r的取值范围是$\sqrt{10}<r\le 2\sqrt{10}$，

故答案为：$\sqrt{10}<r\le 2\sqrt{10}$.

【点睛】本题考查了勾股定理、圆与圆的位置关系、二次函数与不等式，根据圆与圆的位置关系正确建立不等式组是解题关键.

三、解答题：（本大题共 7 题，共 78 分）

19. 计算：$\sqrt[3]{8}+\frac{1}{2+\sqrt{5}}-\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}+\left|\sqrt{5}-3\right|$

【答案】-6

【解析】

【分析】根据立方根、负整数指数幂及二次根式的运算可进行求解．

【详解】解：原式$=2+\sqrt{5}-2-9+3-\sqrt{5}$

$=-6$．

【点睛】本题主要考查立方根、负整数指数幂及二次根式的运算，熟练掌握立方根、负整数指数幂及二次根式的运算是解题的关键．

20. 解不等式组$\begin{cases}3x>x+6\\ \frac{1}{2}x<-x+5\end{cases}$

【答案】$3<x<\frac{10}{3}$

【解析】

【分析】先分别求出两个不等式的解集，再找出它们的公共部分即为不等式组的解集．

【详解】解：$\begin{cases}3x>x+6①\\ \frac{1}{2}x<-x+5②\end{cases}$，

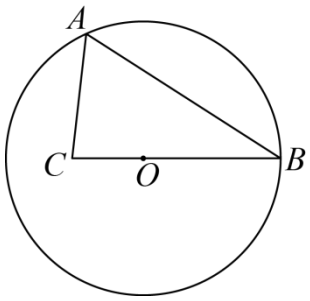
解不等式①得：$x>3$，

解不等式②得：$x<\frac{10}{3}$，

则不等式组的解集为$3<x<\frac{10}{3}$．

【点睛】本题考查了解一元一次不等式组，熟练掌握不等式组的解法是解题关键．

21. 如图，在$\odot O$中，弦AB的长为8，点C在BO延长线上，且$\cos\angle ABC=\frac{4}{5}, OC=\frac{1}{2}OB$.



(1) 求$\odot O$的半径；

(2) 求$\angle BAC$的正切值.

【答案】 (1) 5 (2) $\frac{9}{4}$

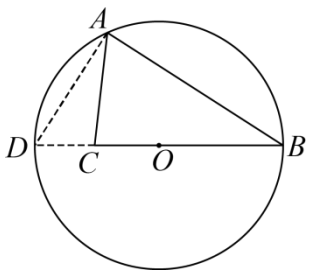
【解析】

【分析】 (1) 延长BC，交$\odot O$于点D，连接AD，先根据圆周角定理可得$\angle BAD=90^{\circ}$，再解直角三角形可得$BD=10$，由此即可得；

(2) 过点C作$CE\perp AB$于点E，先解直角三角形可得$BE=6$，从而可得$AE=2$，再利用勾股定理可得$CE=\frac{9}{2}$，然后根据正切的定义即可得.

【小问1详解】

解：如图，延长BC，交$\odot O$于点D，连接AD，



由圆周角定理得：$\angle BAD=90^{\circ}$，

∵弦 AB 的长为 8，且 $\cos\angle ABC=\frac{4}{5}$，

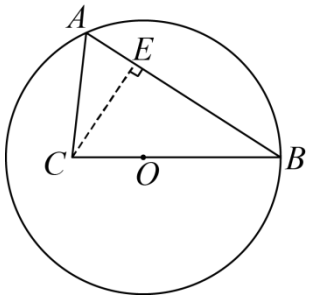
$\therefore \frac{AB}{BD}=\frac{8}{BD}=\frac{4}{5}$，

解得 $BD=10$，

$\therefore \odot O$ 的半径为 $\frac{1}{2}BD=5$.

【小问 2 详解】

解：如图，过点 C 作 $CE\perp AB$ 于点 E，



∵ $\odot O$ 的半径为 5，

$\therefore OB=5$，

∵ $OC=\frac{1}{2}OB$，

$\therefore BC=\frac{3}{2}OB=\frac{15}{2}$，

∵ $\cos\angle ABC=\frac{4}{5}$，

$\therefore \frac{BE}{BC}=\frac{4}{5}$，即 $\frac{\frac{BE}{15}}{2}=\frac{4}{5}$，

解得 $BE=6$，

$\therefore AE=AB-BE=2$，$CE=\sqrt{BC^2-BE^2}=\frac{9}{2}$，

则 $\angle BAC$ 的正切值为 $\frac{CE}{AE}=\frac{\frac{9}{2}}{2}=\frac{9}{4}$．

【点睛】本题考查了圆周角定理、解直角三角形、勾股定理等知识点，熟练掌握解直角三角形的方法是解题关键．

22. “中国石化”推出促销活动，一张加油卡的面值是 1000 元，打九折出售．使用这张加油卡加油，每一升油，油的单价降低 0.30 元．假设这张加油卡的面值能够一次性全部用完．

（1）他实际花了多少钱购买会员卡?

（2）减价后每升油的单价为 y 元/升，原价为 x 元/升，求 y 关于 x 的函数解析式（不用写出定义域）

（3）油的原价是 7.30 元/升，求优惠后油的单价比原价便宜多少元?

【答案】（1）900　（2）$y=0.9x-0.27$

（3）1.00

【解析】

【分析】（1）根据 1000×0.9，计算求解即可；

（2）由题意知，$y=0.9(x-0.30)$，整理求解即可；

（3）当 $x=7.30$，则 $y=6.30$，根据优惠后油的单价比原价便宜 $(x-y)$ 元，计算求解即可．

【小问 1 详解】

解：由题意知，$1000\times0.9=900$（元），

答：实际花了 900 元购买会员卡；

【小问 2 详解】

解：由题意知，$y=0.9(x-0.30)$，整理得$y=0.9x-0.27$，

$\therefore y$关于x的函数解析式为$y=0.9x-0.27$；

【小问3详解】

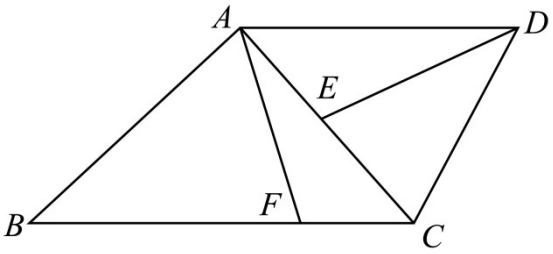
解：当$x=7.30$，则$y=6.30$，

$\because 7.30-6.30=1.00$，

$\therefore$优惠后油的单价比原价便宜1.00元.

【点睛】本题考查了有理数乘法应用，一次函数解析式，一次函数　应用．解题的关键在于理解题意，正确的列出算式和一次函数解析式.

23. 如图，在梯形$ABCD$中$AD\parallel BC$，点F，E分别在线段BC，AC上，且$\angle FAC=\angle ADE$，$AC=AD$



(1) 求证：$DE=AF$

(2) 若$\angle ABC=\angle CDE$，求证：$AF^2=BF\cdot CE$

【答案】(1) 证明见解析

(2) 证明见解析

【解析】

【分析】（1）先根据平行线的性质可得$\angle DAE=\angle ACF$，再根据三角形的全等的判定可得$\triangle DAE\cong\triangle ACF$，然后根据全等的三角形的性质即可得证；

(2) 先根据全等三角形的性质可得$\angle AFC=\angle DEA$，从而可得$\angle AFB=\angle CED$，再根据相似三角形的

判定可得$\triangle ABF \sim \triangle CDE$，然后根据相似三角形的性质即可得证.

【小问 1 详解】

证明：$\because AD \parallel BC$，

$\therefore \angle DAE = \angle ACF$，

在$\triangle DAE$和$\triangle ACF$中，$\begin{cases} \angle DAE = \angle ACF \\ AD = CA \\ \angle ADE = \angle CAF \end{cases}$，

$\therefore \triangle DAE \cong \triangle ACF(\mathrm{ASA})$，

$\therefore DE = AF$.

【小问 2 详解】

证明：$\because \triangle DAE \cong \triangle ACF$，

$\therefore \angle AFC = \angle DEA$，

$\therefore 180^\circ - \angle AFC = 180^\circ - \angle DEA$，即$\angle AFB = \angle CED$，

在$\triangle ABF$和$\triangle CDE$中，$\begin{cases} \angle AFB = \angle CED \\ \angle ABF = \angle CDE \end{cases}$，

$\therefore \triangle ABF \sim \triangle CDE$，

$\therefore \dfrac{AF}{CE} = \dfrac{BF}{DE}$，

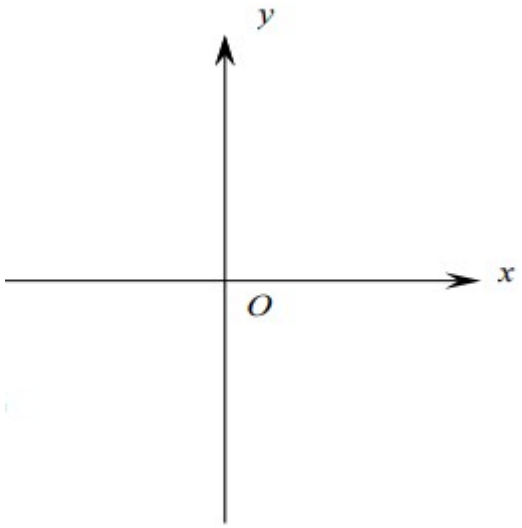
由（1）已证：$DE = AF$，

$\therefore \dfrac{AF}{CE} = \dfrac{BF}{AF}$，

$\therefore AF^2 = BF \cdot CE$.

【点睛】本题考查了三角形全等的判定与性质、相似三角形的判定与性质，熟练掌握相似三角形的判定与性质是解题关键．

24. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知直线 $y=\frac{3}{4}x+6$ 与 x 轴交于点 A，y 轴交于点 B，点 C 在线段 AB 上，以点 C 为顶点的抛物线 M：$y=ax^2+bx+c$ 经过点 B．



(1) 求点 A，B 的坐标；

(2) 求 b，c 的值；

(3) 平移抛物线 M 至 N，点 C，B 分别平移至点 P，D，联结 CD，且 $CD\parallel x$ 轴，如果点 P 在 x 轴上，且新抛物线过点 B，求抛物线 N 的函数解析式．

【答案】 (1) $A(-8,0)$，$B(0,6)$

(2) $b=\frac{3}{2}$，$c=6$

(3) $y=\frac{3}{16}(x-4\sqrt{2})^2$ 或 $y=\frac{3}{16}(x+4\sqrt{2})^2$

【解析】

【分析】 (1) 根据题意，分别将 $x=0$，$y=0$ 代入直线 $y=\frac{3}{4}x+6$ 即可求得；

(2) 设 $C\left(m,\frac{3}{4}m+6\right)$，得到抛物线的顶点式为 $y=a(x-m)^2+\frac{3}{4}m+6$，将 $B(0,6)$ 代入可求得

$m=-\frac{3}{4a}$，进而可得到抛物线解析式为 $y=ax^2+\frac{3}{2}x+6$，即可求得 b，c；

(3) 根据题意，设 $P(p,0)$，$C\left(m,\frac{3}{4}m+6\right)$，根据平移的性质可得点 $_B$，点 C 向下平移的距离相同，即

列式求得 $m=-4$，$a=\frac{3}{16}$，然后得到抛物线 N 解析式为：$y=\frac{3}{16}(x-p)^2$，将 $B(0,6)$ 代入可得

$p=\pm4\sqrt{2}$，即可得到答案.

【小问 1 详解】

解：∵直线 $y=\frac{3}{4}x+6$ 与 x 轴交于点 A，y 轴交于点 B，

当 $x=0$ 时，代入得：$y=6$，故 $B(0,6)$，

当 $y=0$ 时，代入得：$x=-8$，故 $A(-8,0)$，

【小问 2 详解】

设 $C\left(m,\frac{3}{4}m+6\right)$，

则可设抛物线的解析式为：$y=a(x-m)^2+\frac{3}{4}m+6$，

∵抛物线 M 经过点 B，

将 $B(0,6)$ 代入得：$am^2+\frac{3}{4}m+6=6$，

∵ $m\neq0$，

$\therefore am=-\frac{3}{4}$，

即$m=-\frac{3}{4a}$，

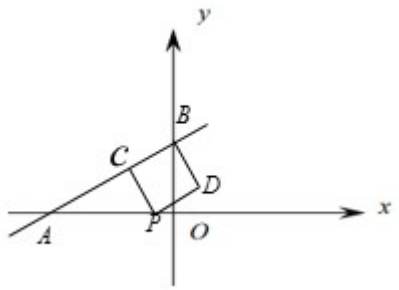
∴将$m=-\frac{3}{4a}$代入$y=a(x-m)^2+\frac{3}{4}m+6$，

整理得：$y=ax^2+\frac{3}{2}x+6$，

故$b=\frac{3}{2}$，$c=6$；

【小问3详解】

如图：



∵$CD\parallel x$轴，点P在x轴上，

∴设$P(p,0)$，$C\left(m,\frac{3}{4}m+6\right)$，

∵点C，B分别平移至点P，D，

∴点B，点C向下平移的距离相同，

$\therefore\frac{3}{4}m+6=6-\left(\frac{3}{4}m+6\right)$，

解得：$m=-4$，

由（2）知 $m=-\frac{3}{4a}$，

$\therefore a=\frac{3}{16}$，

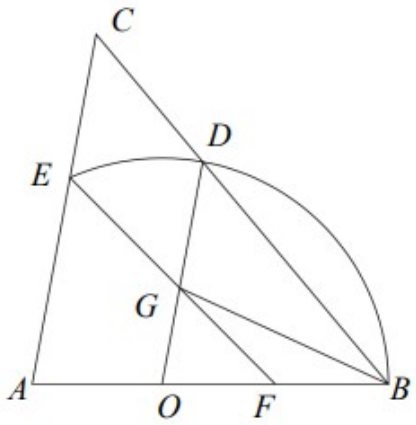
∴抛物线 N 的函数解析式为：$y=\frac{3}{16}(x-p)^2$，

将 $B(0,6)$ 代入可得：$p=\pm 4\sqrt{2}$，

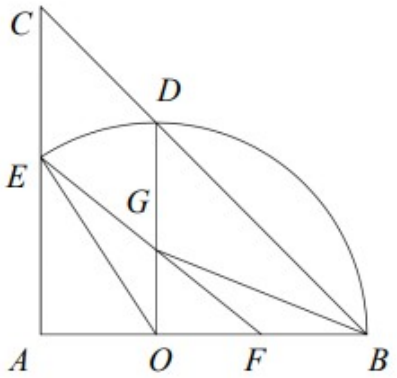
∴抛物线 N 的函数解析式为：$y=\frac{3}{16}(x-4\sqrt{2})^2$ 或 $y=\frac{3}{16}(x+4\sqrt{2})^2$．

【点睛】本题考查了求一次函数与坐标轴的交点坐标，求抛物线的解析式，平移的性质，二次函数的图象和性质等，解题的关键是根据的平移性质求出 m 和 a 的值．

25. 如图（1）所示，已知在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，O 在边 AB 上，点 F 边 OB 中点，为以 O 为圆心，BO 为半径的圆分别交 CB，AC 于点 D，E，联结 EF 交 OD 于点 G．



图（1）



图（2）

（1）如果 $OG=DG$，求证：四边形 $CEGD$ 为平行四边形；

（2）如图（2）所示，联结 OE，如果 $\angle BAC=90^\circ,\angle OFE=\angle DOE,AO=4$，求边 OB 的长；

(3) 联结 BG，如果 $\triangle OBG$ 是以 OB 为腰的等腰三角形，且 $AO=OF$，求 $\dfrac{OG}{OD}$ 的值.

【答案】 (1) 见解析 (2) $1+\sqrt{33}$

(3) $\dfrac{1}{2}$

【解析】

【分析】（1）根据等边对等角得出 $\angle B=\angle C$，$\angle ODB=\angle B$，等量代换得出 $\angle C=\angle ODB$，则 $OD\parallel AC$，根据 F 是 OB 的中点，$OG=DG$，则 FG 是 $\triangle OBD$ 的中位线，则 $FG\parallel BC$，即可得证；

(2) 设 $\angle OFE=\angle DOE=\alpha$，$OF=FB=a$，则 $OE=OB=2a$，由（1）可得 $OD\parallel AC$ 则 $\angle AEO=\angle DOE=\alpha$，等量代换得出 $\angle OFE=\angle AEO=\alpha$，进而证明 $\triangle AEO\backsim\triangle AFE$，得出 $AE^2=AO\cdot AF$，在 $\mathrm{Rt}\triangle AEO$ 中，$AE^2=EO^2-AO^2$，则 $EO^2-AO^2=AO\times AF$，解方程即可求解；

（3）$\triangle OBG$ 是以 OB 为腰的等腰三角形，分为①当 $OG=OB$ 时，②当 $BG=OB$ 时，证明 $\triangle BGO\backsim\triangle BPA$，得出 $\dfrac{OG}{AP}=\dfrac{2}{3}$，设 $OG=2k,AP=3k$，根据 $OG\parallel AE$，得出 $\triangle FOG\backsim\triangle FAE$，可得 $AE=2OG=4k$，$PE=AE-AP=k$，连接 OE 交 PG 于点 Q，证明 $\triangle QPE\backsim\triangle QGO$ 在 $\triangle PQE$ 与 $\triangle BQO$ 中，$PQ=\dfrac{1}{3}a$，$BQ=BG+QG=2a+\dfrac{2}{3}a=\dfrac{8}{3}a$，得出 $\dfrac{PQ}{OQ}=\dfrac{QE}{BQ}=\dfrac{1}{4}$，可得 $\triangle PQE\backsim\triangle OQB$，根据相似三角形的性质得出 $a=2k$，进而即可求解.

【小问 1 详解】

证明：$\because AC=AB$

$\therefore \angle ABC = \angle C$

$\because OD = OB$

$\therefore \angle ODB = \angle ABC$,

$\therefore \angle C = \angle ODB$

$\therefore OD \parallel AC$,

$\because F$ 是OB的中点，$OG = DG$，

$\therefore FG$ 是$\triangle OBD$的中位线，

$\therefore FG \parallel BC$，即$GE \parallel CD$，

$\therefore$四边形$CEDG$是平行四边形；

【小问 2 详解】

解：$\because \angle OFE = \angle DOE, AO = 4$，点$F$边$OB$中点，

设$\angle OFE = \angle DOE = \alpha$，$OF = FB = a$，则$OE = OB = 2a$

由（1）可得$OD \parallel AC$

$\therefore \angle AEO = \angle DOE = \alpha$，

$\therefore \angle OFE = \angle AEO = \alpha$，

又$\because \angle A = \angle A$

$\therefore \triangle AEO \backsim \triangle AFE$，

$\therefore \dfrac{AE}{AF} = \dfrac{AO}{AE}$

即$AE^2=AO\cdot AF$，

$\because\angle A=90^\circ$，

在$\mathrm{Rt}\triangle AEO$中，$AE^2=EO^2-AO^2$，

$\therefore EO^2-AO^2=AO\times AF$，

$\therefore(2a)^2-4^2=4\times(4+a)$

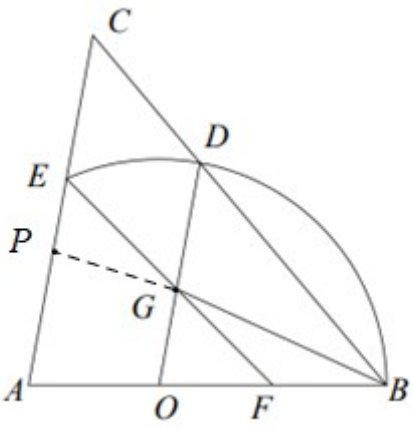
解得：$a=\dfrac{1+\sqrt{33}}{2}$或$a=\dfrac{1-\sqrt{33}}{2}$（舍去）

$\therefore OB=2a=1+\sqrt{33}$；

【小问3详解】

解：①当$OG=OB$时，点G与点D重合，舍去；

②当$BG=OB$时，如图所示，延长BG交AC于点P，



$\because$点F是OB的中点，$AO=OF$，

$\therefore AO=OF=FB$，

设$AO=OF=FB=a$，

$\because OG\parallel AC$

$\therefore \triangle BGO \backsim \triangle BPA$，

$\therefore \frac{OG}{AP}=\frac{OB}{AB}=\frac{2a}{3a}=\frac{2}{3}$，

设 $OG=2k, AP=3k$，

$\because OG \parallel AE$

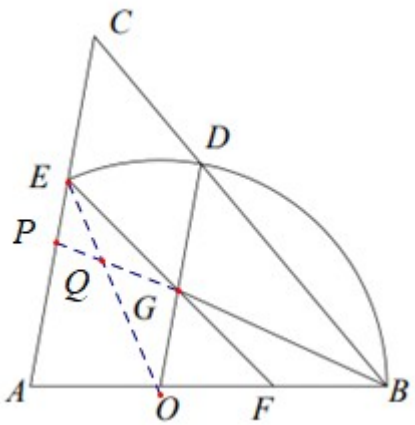
$\therefore \triangle FOG \backsim \triangle FAE$，

$\therefore \frac{OG}{AE}=\frac{OF}{AF}=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}$，

$\therefore AE=2OG=4k$，

$\therefore PE=AE-AP=k$，

连接 OE 交 PG 于点 Q，



$\because OG \parallel PE$，

$\therefore \triangle QPE \backsim \triangle QGO$

$\therefore \frac{GO}{PE}=\frac{QG}{PQ}=\frac{OQ}{EQ}=\frac{2k}{k}=2$，

$\therefore PQ=\frac{1}{3}a, QG=\frac{2}{3}a$，$EQ=\frac{2}{3}a, OQ=\frac{4}{3}a$

在$\vee PQE$与$\triangle BQO$中，$PQ=\frac{1}{3}a$，$BQ=BG+QG=2a+\frac{2}{3}a=\frac{8}{3}a$，

$\therefore \frac{PQ}{OQ}=\frac{QE}{BQ}=\frac{1}{4}$，

又$\angle PQE=\angle BQO$，

$\therefore \triangle PQE\backsim\triangle OQB$，

$\therefore \frac{PE}{OB}=\frac{1}{4}$，

$\therefore \frac{k}{2a}=\frac{1}{4}$，

$\therefore a=2k$，

$` OD=OB=2a, OG=2k$，

$\therefore \frac{OG}{OD}=\frac{2k}{2a}=\frac{k}{a}=\frac{1}{2}$.

【点睛】本题考查了平行四边形的性质，三角形中位线的性质，相似三角形的性质与判定，勾股定理，等腰三角形的定义，圆的性质，熟练掌握相似三角形的性质与判定，第三问中，证明$\triangle PQE\backsim\triangle OQB$是解题的关键.