2022 年上海中考数学真题

一．选择题

1. 8 的相反数是（　）

A. -8　　B. 8　　C. $\frac{1}{8}$　　D. $-\frac{1}{8}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据只有符号不同的两个数互为相反数进行解答即可得．

【详解】解：8 的相反数是 -8，

故选 A．

【点睛】本题考查了相反数的定义，掌握相反数的定义是解题的关键．

2. 下列运算正确的是……（ ）

A. $a^2+a^3=a^6$　　B. $(ab)^2=ab^2$　　C. $(a+b)^2=a^2+b^2$　　D. $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

【答案】D

【解析】

【分析】根据整式加法判定 A；运用积的乘方计算关判定 B；运用完全平方公式计算并判定 C；运用平方差公式计算并判定 D．

【详解】解：A.a^2+a^3 没有同类项不能合并，故此选项不符合题意；

B.$(ab)^2=a^2b^2$，故此选项不符合题意；

C.$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，故此选项不符合题意

D $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$，故此选项符合题意

故选：D．

【点睛】本题考查整理式加法，积的乘方，完全平方公式，平方差公式，熟练掌握积的乘方运算法则、完全平方公式、平方差公式是解题的关键．

3. 已知反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（$k\neq0$），且在各自象限内，y 随 x 的增大而增大，则下列点可能在这个函数图象上的为（ ）

A.（2，3）　　B.（-2，3）　　C.（3，0）　　D.（-3，0）

【答案】B

【解析】

【分析】根据反比例函数性质求出 $k<0$，再根据 $k=xy$，逐项判定即可．

【详解】解：∵反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（$k\neq0$），且在各自象限内，y 随 x 的增大而增大，，

∴$k=xy<0$，

A、∵$2\times3>0$，∴点（2，3）不可能在这个函数图象上，故此选项不符合题意；

B、∵$-2\times3<0$，∴点（2，3）可能在这个函数图象上，故此选项符合题意；

C、∵$3\times0=0$，∴点（2，3）不可能在这个函数图象上，故此选项不符合题意；

D、∵$-3\times0=0$，∴点（2，3）不可能在这个函数图象上，故此选项不符合题意；

故选：B．

【点睛】本题考查反比例函数的性质，反比例函数图象上点的坐标特征，熟练掌握反比例函数的性质是解题的关键．

4. 我们在外卖平台点单时会有点餐用的钱和外卖费 6 元，我们计算了点单的总额和不计算外卖费的总额的数据，则两种情况计算出的数据一样的是（　）

A. 平均数　　B. 中位数　　C. 众数　　D. 方差

【答案】D

【解析】

【分析】根据平均数，中位数，众数和方差的特点，这组数据都加上 6 得到一组新的数据，方差不变，平均数，中位数改变，众数改变，即可得出答案．

【详解】解：将这组数据都加上 6 得到一组新的数据，

则新数据的平均数改变，众数改变，中位数改变，但是方差不变；

故选：D．

【点睛】本题主要考查平均数、中位数、众数、方差的意义．理解求解一组数据的平均数，众数，中位数，方差时的内在规律，掌握“新数据与原数据之间在这四个统计量上的内在规律”是解本题的关键．

5. 下列说法正确的是（　）

A. 命题一定有逆命题　　B. 所有的定理一定有逆定理

C. 真命题的逆命题一定是真命题　　D. 假命题的逆命题一定是假命题

【答案】A

【解析】

【分析】根据命题的定义和定理及其逆定理之间的关系，分别举出反例，再进行判断，即可得出答案．

【详解】解：A、命题一定有逆命题，故此选项符合题意；

B、定理不一定有逆定理，如：全等三角形对应角相等没有逆定理，故此选项不符合题意；

C、真命题的逆命题不一定是真命题，如：对顶角相等的逆命题是：相等的两个角是对顶角，它是假命题而不是真命题，故此选项不符合题意；

D、假命题的逆命题定不一定是假命题，如：相等的两个角是对顶角的逆命题是：对顶角相等，它是真命题，故此选项不符合题意．

故选：A．

【点睛】本题考查了命题与定理，掌握好命题的真假及互逆命题的概念是解题的关键．把一个命题的条件和结论互换就得到它的逆命题，所有的命题都有逆命题；正确的命题叫真命题，错误的命题叫假命题．

6. 有一个正 n 边形旋转 90° 后与自身重合，则 n 为（　）

A. 6　　B. 9　　C. 12　　D. 15

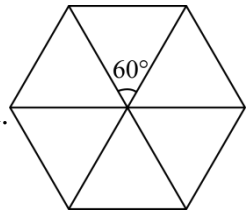
【答案】C

【解析】

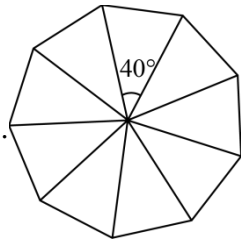
【分析】根据选项求出每个选项对应的正多边形的中心角度数，与 90° 一致或有倍数关系的则符合题意．

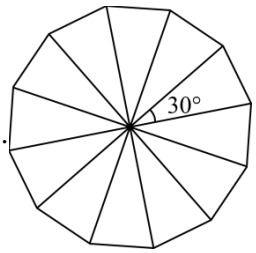
【详解】如图所示，计算出每个正多边形　中心角，90° 是 30° 的 3 倍，则可以旋转得到．

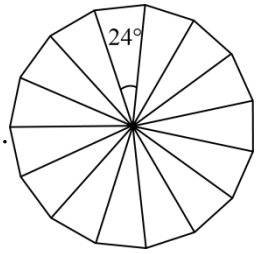
A.



B.



C.

D.

观察四个正多边形的中心角，可以发现正 12 边形旋转 90°后能与自身重合

故选 C．

【点睛】本题考查正多边形中心角与旋转的知识，解决本题的关键是求出中心角的度数并与旋转度数建立关系．

二．填空题

7. 计算：3a－2a＝_____．

【答案】a

【解析】

【详解】根据同类项与合并同类项法则计算：3a－2a=（3－2）a=a

8. 已知 f（x）=3x，则 f（1）=_____．

【答案】3

【解析】

【分析】直接代入求值即可．

【详解】解：∵f（x）=3x，

∴f（1）=3×1=3，

故答案为：3

【点睛】本题主要考查了求函数值，直接把自变量的值代入即可．

9. 解方程组 $\begin{cases} x+y=1 \\ x^2-y^2=3 \end{cases}$ 的结果为_____．

【答案】 $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$

【解析】

【分析】利用平方差公式将②分解因式变形，继而可得$x-y=3$④，联立①④利用加减消元法，算出结果即可．

【详解】解：$\begin{cases}x+y=1① \\ x^2-y^2=3②\end{cases}$

由②，得：$(x+y)(x-y)=3$③，

将①代入③，得：$1\times(x-y)=3$，即$x-y=3$④，

①+②，得：$2x=4$，

解得：$x=2$，

①−②，得：$2y=-2$，

解得：$y=-1$，

∴方程组$\begin{cases}x+y=1 \\ x^2-y^2=3\end{cases}$的结果为$\begin{cases}x=2 \\ y=-1\end{cases}$．

【点睛】本题考查解二元二次方程组，与平方差公式分解因式，能够熟练掌握平方差公式分解因式是解决本题的关键．

10. 已知$x^2-2\sqrt{3}x+m=0$有两个不相等的实数根，则m的取值范围是_____．

【答案】$m<3$

【解析】

【分析】根据方程有两个不相等的实数根，则$\Delta>0$，即$(-2\sqrt{3})^2-4m>0$，求解即可．

【详解】解：∵$x-2\sqrt{3}x+m=0$有两个不相等的实数根，

∴$\Delta=(-2\sqrt{3})^2-4m>0$

解得：$m<3$，

故答案为：$m<3$．

【点睛】本题考查一元二次方程根的判别式，熟练掌握“当方程有两个不相等的实数根，$\Delta>0$；当方程有两个相等的实数根，$\Delta=0$；当方程没有实数根，$\Delta<0$”是解题的关键．

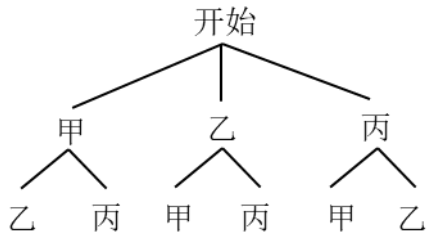
11. 甲、乙、丙三人参加活动，两个人一组，则分到甲和乙的概率为_____．

【答案】$\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】首先根据题意画出树状图，然后由树状图求得所有等可能的结果与分到甲和乙的情况，再利用概率公式求解即可求得答案.

【详解】解：画树形图如下：



由树形图可知所有可能情况共 6 种，其中分到甲和乙的情况有 2 中，

所以分到甲和乙的概率为 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$，

故答案为：$\frac{1}{3}$

【点睛】本题考查的是用列表法或画树状图法求概率.列表法或画树状图法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果，列表法适合于两步完成的事件，树状图法适合两步或两步以上完成的事件，注意概率=所求情况数与总情况数之比.

12. 某公司 5 月份的营业额为 25 万，7 月份的营业额为 36 万，已知 5、6 月的增长率相同，则增长率为_____.

【答案】20%

【解析】

【分析】根据该公司 5、6 两个月营业额的月均增长率为 x 结合 5 月、7 月营业额即可得出关于 x 的一元二次方程，解此方程即可得解.

【详解】解：设该公司 5、6 两个月营业额的月均增长率为 x，根据题意得，

$25(1+x)^2=36$

解得，$x_1=0.2, x_2=-2.2$（舍去）

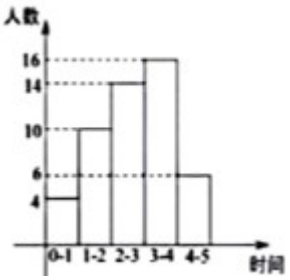
所以，增长率为 20%

故答案为：20%

【点睛】本题考查了由实际问题抽象出一元二次方程，根据数量关系列出关于 x 的一元二次方程是解题的关键.

13. 为了解学生的阅读情况，对某校六年级部分学生的阅读情况展开调查，并列出了相应的

频数分布直方图（如图所示）（每组数据含最小值，不含最大值）（0-1 小时 4 人，1-2 小时 10 人，2-3 小时 14 人，3-4 小时 16 人，4-5 小时 6 人），若共有 200 名学生，则该学校六年级学生阅读时间不低于 3 小时的人数是_____.



【答案】88

【解析】

【分析】由 200 乘以样本中不低于 3 小时的人数的百分比即可得到答案.

【详解】解：该学校六年级学生阅读时间不低于 3 小时的人数是

$$\frac{16+6}{4+10+14+16+6}\times 200=\frac{22}{50}\times 200=88,$$

故答案为：88

【点睛】本题考查的是利用样本估计总体，求解学生阅读时间不低于 3 小时的人数的百分比是解本题的关键.

14. 已知直线 $y=kx+b$ 过第一象限且函数值随着 x 的增大而减小，请列举出来这样的一条直线：_____.

【答案】$y=-x+2$（答案不唯一）

【解析】

【分析】直接根据一次函数的图象与系数的关系即可得出结论.

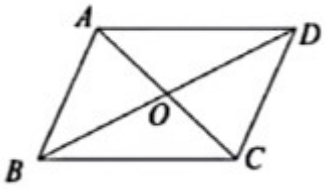
【详解】∵直线 $y=kx+b$ 过第一象限且函数值随着 x 的增大而减小，

$\therefore k<0$，$b\geq 0$，

∴符合条件的一条直线可以为：$y=-x+2$（答案不唯一）.

【点睛】本题考查一次函数的图象与系数的关系，熟知一次函数 $y=kx+b$（$k\neq 0$），当 $k<0$，$b\geq 0$ 时，函数图象过第一象限且函数值随着 x 的增大而减小.

15. 如图所示，在$\square ABCD$ 中，AC，BD 交于点 O，$BO=a, BC=b,$ 则 $DC=$_____.



【答案】$-2\vec{a}+\vec{b}$

【解析】

【分析】利用向量相减平行四边形法则：向量相减时，起点相同，差向量即从后者终点指向前者终点即可求解.

【详解】解：∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，AC，BD 交于点 O，

又 $BO=a$，$BC=b$，

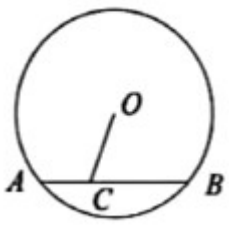
$\therefore BD=2BO=2a$，

$\therefore DC=BC-BD=b-2a$，

故答案为：$-2\vec{a}+\vec{b}$.

【点睛】本题考查平行四边形的性质，向量相减平行四边形法则，解题的关键是熟练掌握向量相减平行四边形法则.

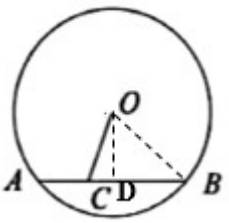
16. 如图所示，小区内有个圆形花坛 O，点 C 在弦 AB 上，AC=11，BC=21，OC=13，则这个花坛　面积为_____.（结果保留 π）



【答案】400π

【解析】

【详解】解：过点 O 作 $OD\perp AB$ 于 D，连接 OB，如图，



∵AC=11，BC=21，

∴$AB=AC+BC=32$，

∵$OD\perp AB$ 于 D，

∴$AD=BD=\frac{1}{2}AB=16$，

∴$CD=AD-AC=5$，

在 $Rt\triangle OCD$ 中，由勾股定理，得

$OD=\sqrt{OC^2-CD^2}=\sqrt{13^2-5^2}=12$,

在 $Rt\triangle OBD$ 中，由勾股定理，得

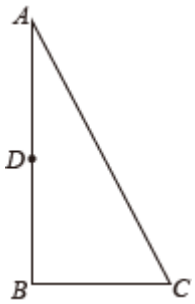
$OB=\sqrt{BD^2+CD^2}=\sqrt{16^2+12^2}=20$，

∴这个花坛的面积=$20^2\pi=400\pi$，

故答案为：400π.

【点睛】本题考查垂径定理，勾股定理，圆的面积，熟练掌握垂径定理与勾股定理相结合求线段长是解题的关键.

17. 如图，在$\triangle ABC$ 中，$\angle A=30°$，$\angle B=90°$，D 为 AB 中点，E 在线段 AC 上，$\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}$，则 $\frac{AE}{AC}=$_____.



【答案】$\frac{1}{2}$或$\frac{1}{4}$

【解析】

【分析】由题意可求出 $DE=\frac{1}{2}BC$，取 AC 中点 E_1，连接 DE_1，则 DE_1 是$\triangle ABC$ 的中位线，满足 $DE_1=\frac{1}{2}BC$，进而可求此时 $\frac{AE_1}{AC}=\frac{1}{2}$，然后在 AC 上取一点 E_2，使得 $DE_1=DE_2$，则 $DE_2=\frac{1}{2}BC$，证明$\triangle DE_1E_2$是等边三角形，求出 $E_1E_2=\frac{1}{4}AC$，即可得到 $\frac{AE_2}{AC}=\frac{1}{4}$，问题

得解.

【详解】解：∵D为AB中点，

∴$\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}=\frac{1}{2}$，即$DE=\frac{1}{2}BC$，

取AC中点E_1，连接DE_1，则DE_1是△ABC的中位线，此时$DE_1 \parallel BC$，$DE_1=\frac{1}{2}BC$，

∴$\frac{AE_1}{AC}=\frac{AD}{AB}=\frac{1}{2}$，

在AC上取一点E_2，使得$DE_1=DE_2$，则$DE_2=\frac{1}{2}BC$，

∵∠A=30°，∠B=90°，

∴∠C=60°，$BC=\frac{1}{2}AC$，

∵$DE_1 \parallel BC$，

∴∠DE_1E_2=60°，

∴△DE_1E_2是等边三角形，

∴$DE_1=DE_2=E_1E_2=\frac{1}{2}BC$，

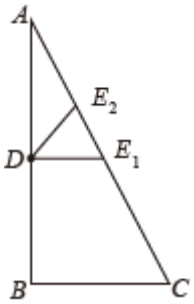
∴$E_1E_2=\frac{1}{4}AC$，

∵$AE_1=\frac{1}{2}AC$，

∴$AE_2=\frac{1}{4}AC$，即$\frac{AE_2}{AC}=\frac{1}{4}$，

综上，$\frac{AE}{AC}$的值为：$\frac{1}{2}$或$\frac{1}{4}$，

故答案为：$\frac{1}{2}$或$\frac{1}{4}$.



【点睛】本题考查了三角形中位线的性质，平行线分线段成比例，等边三角形的判定和性质以及含30°角的直角三角形的性质等，根据 $DE=\frac{1}{2}BC$ 进行分情况求解是解题的关键.

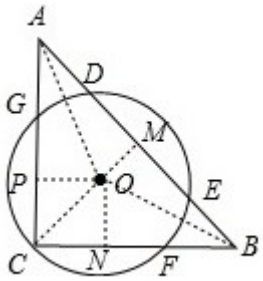
18. 定义：有一个圆分别和一个三角形的三条边各有两个交点，截得的三条弦相等，我们把这个圆叫作“**等弦圆**”，现在有一个斜边长为2的等腰直角三角形，当等弦圆最大时，这个圆的半径为_____.

【答案】 $2-\sqrt{2}$

【解析】

【分析】根据题意画出相应的图形，利用圆周角定理、直角三角形的边角关系以及三角形的面积公式进行计算即可.

【详解】



解：如图，∵圆与三角形的三条边都有两个交点，截得的三条弦相等，

∴圆心O就是三角形的内心，

∴当⊙O过点C时，且在等腰直角三角形ABC的三边上截得的弦相等，即CG=CF=DE，此时⊙O最大，

过点O分别作弦CG、CF、DE的垂线，垂足分别为P、N、M，连接OC、OA、OB，

∵CG=CF=DE，

∴OP=OM=ON，

∵∠C=90°，AB=2，AC=BC，

$\therefore AC=BC=\frac{\sqrt{2}}{2}\times 2=\sqrt{2}$

由 $S_{\triangle AOC}+S_{\triangle BOC}+S_{\triangle AOB}=S_{\triangle ABC}$

$\therefore \frac{1}{2}AC\cdot OP+\frac{1}{2}BC\cdot ON+\frac{1}{2}AB\cdot OM=S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC$

设 OM=x,则 OP=ON=x,

$\therefore \sqrt{2}x+\sqrt{2}x+2x=\sqrt{2}\times\sqrt{2}$

解得 $x=\sqrt{2}-1$

即 $OP=ON=\sqrt{2}-1$

在 $Rt_{\triangle CON}$ 中，$OC=\sqrt{2}ON=2-\sqrt{2}$

故答案为：$2-\sqrt{2}$

三．解答题

19. 计算：$|-\sqrt{3}|-(\frac{1}{3})^{-\frac{1}{2}}+\frac{2}{\sqrt{3}-1}-12^{\frac{1}{2}}$

【答案】$1-\sqrt{3}$

【解析】

分析】原式分别化简 $|-\sqrt{3}|=\sqrt{3}$，$(\frac{1}{3})^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$，$\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+1$，$12^{\frac{1}{2}}=2\sqrt{3}$，再进行合并即可得到答案．

【详解】解：$|-\sqrt{3}|-(\frac{1}{3})^{-\frac{1}{2}}+\frac{2}{\sqrt{3}-1}-12^{\frac{1}{2}}$

$=\sqrt{3}-\sqrt{3}+\sqrt{3}+1-2\sqrt{3}$

$=1-\sqrt{3}$

【点睛】本题主要考查了实数的混合运算，熟练掌握运算法则是解答本题的关键．

20. 解关于 x 的不等式组 $\begin{cases}3x>x-4\\ \frac{4+x}{3}>x+2\end{cases}$

【答案】$-2<x<-1$

【解析】

【分析】分别求出不等式组中每一个不等式的解集，再确定出公共部分，即可求解．

【详解】解：$\begin{cases}3x>x-4① \\ \frac{4+x}{3}>x+2②\end{cases}$，

解①得：$x>-2$，

解②得：$x<-1$，

∴$-2<x<-1$．

【点睛】本题考查解一元一次不等式组，熟练掌握根据“大取较大，小小取较小，大小小大中间找，大大小小无处找”的原则性确定不等式组的解集是解题的关键．

21. 一个一次函数的截距为 1，且经过点 A（2，3）．

（1）求这个一次函数的解析式；

（2）点 A，B 在某个反比例函数上，点 B 横坐标为 6，将点 B 向上平移 2 个单位得到点 C，求 $\cos\angle ABC$ 的值．

【答案】（1）$y=x+1$

（2）$\frac{\sqrt{5}}{5}$

【解析】

【小问 1 详解】

解：设这个一次函数的解析式 $y=kx+1$，

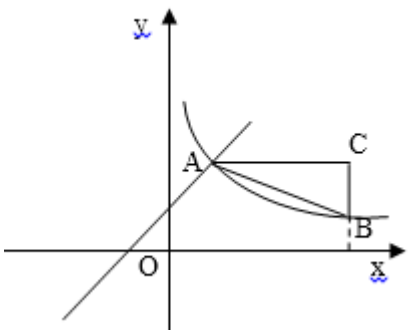
把 A（2，3）代入，得 $3=2k+1$，

解得：$k=1$，

∴这个一次函数的解析式为 $y=x+1$；

【小问 2 详解】

解：如图，



设反比例函数解析式为 $y=\frac{m}{x}$，

把A（2，3）代入，得$3=\frac{m}{2}$，

解得：$m=6$，

∴反比例函数解析式为$y=\frac{6}{x}$，

当$x=6$时，则$y=\frac{6}{6}=1$，

∴B（6，1），

∴$AB=\sqrt{(6-2)^2+(1-3)^2}=2\sqrt{5}$，

∵将点B向上平移2个单位得到点C，

∴C（6，3），$BC=2$，

∵A（2，3），C（6，3），

∴$AC\parallel x$轴，

∵B（6，1），C（6，3），

∴$BC\perp x$轴，

∴$AC\perp BC$，

∴$\angle ACB=90°$，

∴$\triangle ABC$是直角三角形，

∴$\cos\angle ABC=\frac{BC}{AB}=\frac{2}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

【点睛】本题考查待定系数法求函数解析式，点的平移，解三角形，坐标与图形，求得$AC\perp BC$是解题的关键.

22. 我们经常会采用不同方法对某物体进行测量，请测量下列灯杆AB的长.

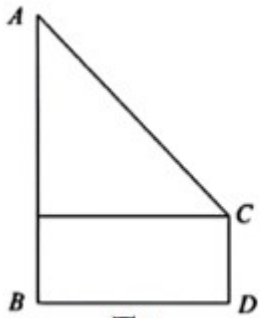


图1

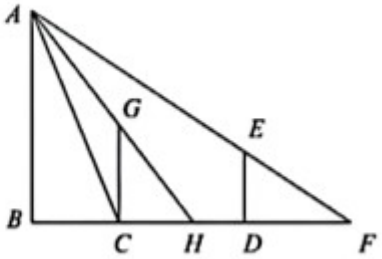


图2

（1）如图1所示，将一个测角仪放置在距离灯杆AB底部a米的点D处，测角仪高为b米，

从 C 点测得 A 点的仰角为 α，求灯杆 AB 的高度．（用含 a，b，a 的代数式表示）

（2）我国古代数学家赵爽利用影子对物体进行测量的方法，在至今仍有借鉴意义图 2 所示，现将一高度为 2 米的木杆 CG 放在灯杆 AB 前，测得其影长 CH 为 1 米，再将木杆沿着 BC 方向移动 1.8 米至 DE 的位置，此时测得其影长 DF 为 3 米，求灯杆 AB 的高度

【答案】（1）$a\tan\alpha+b$ 米

（2）3.8 米

【解析】

【分析】（1）由题意得 $BD=a$，$CD=b$，$\angle ACE=\alpha$，根据四边形 $CDBE$ 为矩形，得到 $BE=CD=b$，$BD=CE=a$，在 $Rt\Delta ACE$ 中，由正切函数 $\tan\alpha=\dfrac{AE}{CE}$，即可得到 AB 的高度；

（2）根据 $AB\parallel ED$，得到$\Delta ABF\sim\Delta EDF$，根据相似三角形的对应边成比例得到 $\dfrac{ED}{DF}=\dfrac{AB}{BF}$，又根据 $AB\parallel GC$，得出$\Delta ABH\sim\Delta GCH$，根据相似三角形的对应边成比例得到 $\dfrac{AB}{BH}=\dfrac{GC}{CH}$ 联立得到二元一次方程组解之即可得；

【小问 1 详解】

解：如图

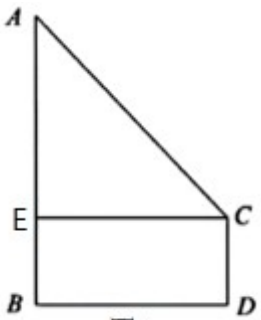


图 1

由题意得 $BD=a$，$CD=b$，$\angle ACE=\alpha$

$\angle B=\angle D=\angle CEB=90°$

$\therefore$四边形 $CDBE$ 为矩形，

则 $BE=CD=b$，$BD=CE=a$，

在 $Rt\Delta ACE$ 中，$\tan\alpha=\dfrac{AE}{CE}$，

得 $AE=CE=CE\times\tan\alpha=a\tan\alpha$

而 $AB=AE+BE$，

故 $AB= a\tan\alpha+b$

答：灯杆 AB 的高度为 $a\tan\alpha+b$ 米

【小问 2 详解】

由题意可得，$AB\parallel GC\parallel ED$，$GC=ED=2$，$CH=1$，$DF=3$，$CD=1.8$

由于 $AB\parallel ED$，

$\therefore \Delta ABF\sim\Delta EDF$，

此时 $\dfrac{ED}{DF}=\dfrac{AB}{BF}$

即 $\dfrac{2}{3}=\dfrac{AB}{BC+1.8+3}$①，

$\because AB\parallel GC$

$\therefore \Delta ABH\sim\Delta GCH$，

此时 $\dfrac{AB}{BH}=\dfrac{GC}{CH}$，

$\dfrac{2}{1}=\dfrac{AB}{BC+1}$ ②

联立①②得

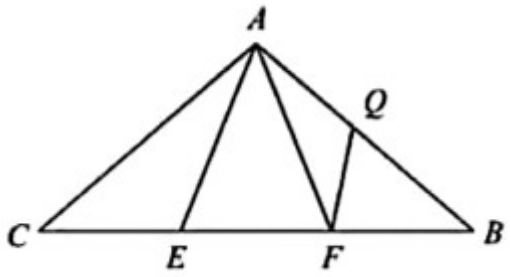
$$\begin{cases}\dfrac{AB}{BC+4.8}=\dfrac{2}{3}\\ \dfrac{AB}{BC+1}=2\end{cases},$$

解得：$\begin{cases}AB=3.8\\ BC=0.9\end{cases}$

答：灯杆 AB 的高度为 3.8 米

【点睛】本题考查了相似三角形的应用，锐角三角函数的应用，以及二元一次方程组，解题的关键是读懂题意，熟悉相似三角形的判定与性质．

23. 如图所示，在等腰三角形 ABC 中，$AB=AC$，点 E，F 在线段 BC 上，点 Q 在线段 AB 上，且 $CF=BE$，$AE^2=AQ\cdot AB$ 求证：



（1）$\angle CAE=\angle BAF$；

（2）$CF\cdot FQ=AF\cdot BQ$

【答案】（1）见解析　（2）见解析

【解析】

【分析】（1）利用 SAS 证明$\triangle ACE\cong\triangle ABF$即可；

（2）先证$\triangle ACE\backsim\triangle AFQ$可得$\angle AEC=\angle AQF$，求出$\angle BQF=\angle AFE$，再证$\triangle CAF\backsim\triangle BFQ$，利用相似三角形的性质得出结论．

【小问 1 详解】

证明：$\because AB=AC$，

$\therefore\angle B=\angle C$，

$\because CF=BE$，

$\therefore CE=BF$，

在$\triangle ACE$和$\triangle ABF$中，$\begin{cases}AC=AB\\ \angle C=\angle B\\ CE=BF\end{cases}$，

$\therefore\triangle ACE\cong\triangle ABF$（SAS），

$\therefore\angle CAE=\angle BAF$；

【小问 2 详解】

证明：$\because\triangle ACE\cong\triangle ABF$，

$\therefore AE=AF$，$\angle CAE=\angle BAF$，

$\because AE^2=AQ\cdot AB$，$AC=AB$，

$\therefore\dfrac{AE}{AQ}=\dfrac{AB}{AE}$，即$\dfrac{AE}{AQ}=\dfrac{AC}{AF}$，

$\therefore\triangle ACE\backsim\triangle AFQ$，

$\therefore\angle AEC=\angle AQF$，

∴∠AEF=∠BQF，

∵AE＝AF，

∴∠AEF=∠AFE，

∴∠BQF=∠AFE，

∵∠B=∠C，

∴△CAF∽△BFQ，

∴$\frac{CF}{BQ}=\frac{AF}{FQ}$，即 $CF\cdot FQ=AF\cdot BQ$．

【点睛】本题考查了等腰三角形　性质，全等三角形的判定和性质以及相似三角形的判定和性质，熟练掌握相关判定定理和性质定理是解题的关键．

24. 已知：$y=\frac{1}{2}x^2+bx+c$经过点$A(-2,-1)$，$B(0,-3)$．

（1）求函数解析式；

（2）平移抛物线使得新顶点为$P(m,n)$（m＞0）．

①倘若$S_{\triangle OPB}=3$，且在$x=k$的右侧，两抛物线都上升，求k的取值范围；

②P在原抛物线上，新抛物线与y轴交于Q，$\angle BPQ=120$时，求P点坐标．

【答案】（1）$y=\frac{1}{2}x^2-3$

（2）①$k\geq 2$

②P的坐标为（$2\sqrt{3}$，3）或（$-2\sqrt{3}$，3）

【解析】

【分析】（1）把$A(-2,-1)$，$B(0,-3)$代入$y=\frac{1}{2}x^2+bx+c$，求解即可；

（2）①由$y=\frac{1}{2}x^2-3$，得顶点坐标为(0，-3)，即点B是原抛物线的顶点，由平移得抛物线向右平移了m个单位，根据$S_{\triangle OPB}=\frac{1}{2}\times 3m=3$，求得$m$=2，在$x=k$的右侧，两抛物线都上升，根据抛物线的性质即可求出$k$取值范围；

②把P（m，n）代入$y=\frac{1}{2}x^2-3$，得n=$\frac{1}{2}m^2-3$，则P（m，$\frac{1}{2}m^2-3$），从而求得新

抛物线解析式为：$y=\frac{1}{2}(x-m)^2+n=\frac{1}{2}x^2-mx+m^2-3$，则 $Q(0，m^2-3)$，从而可求得 $BQ=m^2$，$BP^2=m^2+(\frac{1}{2}m^2-3+3)^2=m^2+\frac{1}{4}m^4$，$PQ^2=m^2+[(\frac{1}{2}m^2-3)-(m^2-3)]^2=m^2+\frac{1}{4}m^4$，即可得出 $BP=PQ$，过点 P 作 $PC\perp y$ 轴于 C，则 $PC=|m|$，根据等腰三角形的性质可得 $BC=\frac{1}{2}BQ=\frac{1}{2}m^2$，$\angle BPC=\frac{1}{2}\angle BPQ=\frac{1}{2}\times120°=60°$，再根据 $\tan\angle BPC=\tan 60°=\frac{BC}{PC}=\frac{\frac{1}{2}m^2}{|m|}=\sqrt{3}$，即可求出 m 值，从而求出点 P 坐标．

【小问 1 详解】

解：把 $A(-2,-1)$，$B(0,-3)$ 代入 $y=\frac{1}{2}x^2+bx+c$，得

$\begin{cases}-1=2-2b+c\\-3=c\end{cases}$，解得：$\begin{cases}b=0\\c=-3\end{cases}$，

∴函数解析式为：$y=\frac{1}{2}x^2-3$；

【小问 2 详解】

解：①∵ $y=\frac{1}{2}x^2-3$，

∴顶点坐标为(0，-3)，即点 B 是原抛物线的顶点，

∵平移抛物线使得新顶点为 $P(m,n)$（$m>0$）．

∴抛物线向右平移了 m 个单位，

∴ $S_{\triangle OPB}=\frac{1}{2}\times3m=3$，

∴$m=2$，

∴平移抛物线对称轴为直线 $x=2$，开口向上，

∵在 $x=k$ 的右侧，两抛物线都上升，

又∵原抛物线对称轴为 y 轴，开口向上，

∴$k\geq2$，

②把 P（m，n）代入 $y=\frac{1}{2}x^2-3$，得 $n=\frac{1}{2}m^2-3$，

$\therefore P\ (m,\ \frac{1}{2}m^2-3)$

根据题意，得新抛物线解析式为：$y=\frac{1}{2}(x-m)^2+n=\frac{1}{2}x^2-mx+m^2-3$，

$\therefore Q(0,\ m^2-3)$，

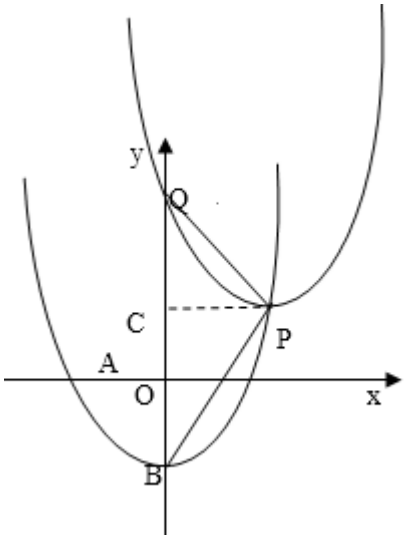
$\because B\ (0,\ -3)$，

$\therefore BQ=m^2$，$BP^2=m^2+(\frac{1}{2}m^2-3+3)^2=m^2+\frac{1}{4}m^4$，

$PQ^2=m^2+[(\frac{1}{2}m^2-3)-(m^2-3)]^2=m^2+\frac{1}{4}m^4$，

$\therefore BP=PQ$，

如图，过点 P 作 $PC\perp y$ 轴于 C，则 $PC=|m|$，



$\because BP=PQ$，$PC\perp BQ$，

$\therefore BC=\frac{1}{2}BQ=\frac{1}{2}m^2$，$\angle BPC=\frac{1}{2}\angle BPQ=\frac{1}{2}\times120°=60°$，

$\therefore \tan\angle BPC=\tan 60°=\frac{BC}{PC}=\frac{\frac{1}{2}m^2}{|m|}=\sqrt{3}$，

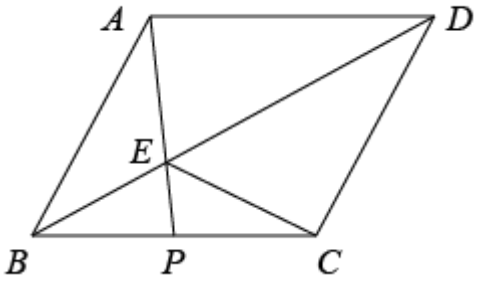
解得：$m=2\sqrt{3}$，$-2\sqrt{3}$（舍）

$\therefore n=\frac{1}{2}m^2-3=3$，

故 P 的坐标为（$2\sqrt{3}$，3）

【点睛】本题考查待定系数法求抛物线解析式，抛物线的平移，抛物线的性质，解直角三角形，等腰三角形的性质，本题属抛物线综合题目，属中考常考试题目，难度一般．

25. 平行四边形 $ABCD$，若 P 为 BC 中点，AP 交 BD 于点 E，连接 CE．



（1）若 $AE=CE$，

① 证明 $ABCD$ 为菱形；

② 若 $AB=5$，$AE=3$，求 BD 的长．

（2）以 A 为圆心，AE 为半径，B 为圆心，BE 为半径作圆，两圆另一交点记为点 F，且 $CE=\sqrt{2}AE$．若 F 在直线 CE 上，求 $\frac{AB}{BC}$ 的值．

【答案】（1）①见解析；② $6\sqrt{2}$

(2) $\frac{\sqrt{10}}{5}$

【解析】

【分析】（1）①连接 AC 交 BD 于 O，证△AOE≌△COE(SSS)，得∠AOE=∠COE，从而得∠COE=90°，则 $AC\perp BD$，即可由菱形的判定定理得出结论；

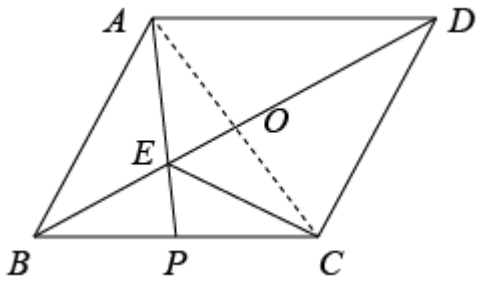
② 先证点 E 是△ABC 的重心，由重心性质得 $BE=2OE$，然后设 $OE=x$，则 $BE=2x$，在 Rt△AOE 中，由勾股定理，得 $OA^2=AE^2-OE^2=3^2-x^2=9-x^2$,在 Rt△$AOB$ 中，由勾股定理，得 $OA^2=AB^2-OB^2=5^2-(3x)^2=25-9x^2$,从而得 $9-x^2=25-9x^2$，解得：$x=\sqrt{2}$,即可得 $OB=3x=3\sqrt{2}$，再由平行四边形性质即可得出 BD 长；

（2）由⊙A 与⊙B 相交于 E、F，得 $AB\perp EF$，点 E 是△ABC 的重心，又 F 在直线 CE 上，则 CG 是△ABC 的中线，则 $AG=BG=\frac{1}{2}AB$，根据重心性质得 $GE=\frac{1}{2}CE=\frac{\sqrt{2}}{2}AE$，$CG=CE+GE=\frac{3\sqrt{2}}{2}AE$，在 Rt△$AGE$ 中，由勾股定理，得 $AG^2=AE^2-GE^E=AE^2-(\frac{\sqrt{2}}{2}AE)^2=\frac{1}{2}AE^2$,则 $AG=\frac{\sqrt{2}}{2}AE$,所以 $AB=2AG=\sqrt{2}AE$，在 Rt△BGC 中，由勾股定理，得

$BC^2=BG^2+CG^2=\frac{1}{2}AE^2+(\frac{3\sqrt{2}}{2}AE)^2=5AE^2$，则 $BC=\sqrt{5}AE$，代入即可求得 $\frac{AB}{BC}$ 的值．

【小问 1 详解】

① 证明：如图，连接 AC 交 BD 于 O，



∵平行四边形 $ABCD$，

∴$OA=OC$，

∵$AE=CE$，$OE=OE$，

∴$\triangle AOE\cong\triangle COE$(SSS)，

∴$\angle AOE=\angle COE$，

∵$\angle AOE+\angle COE=180°$，

∴$\angle COE=90°$，

∴$AC\perp BD$，

∵平行四边形 $ABCD$，

∴四边形 $ABCD$ 是菱形；

②∵$OA=OC$，

∴OB 是$\triangle ABC$ 的中线，

∵ P 为 BC 中点，

∴AP 是$\triangle ABC$ 的中线，

∴点 E 是$\triangle ABC$ 的重心，

∴$BE=2OE$，

设 $OE=x$，则 $BE=2x$，

在 $Rt\triangle AOE$ 中，由勾股定理，得 $OA^2=AE^2-OE^2=3^2-x^2=9-x^2$,

在 $Rt\triangle AOB$ 中，由勾股定理，得 $OA^2=AB^2-OB^2=5^2-(3x)^2=25-9x^2$,

∴$9-x^2=25-9x^2$，

解得：$x=\sqrt{2}$，

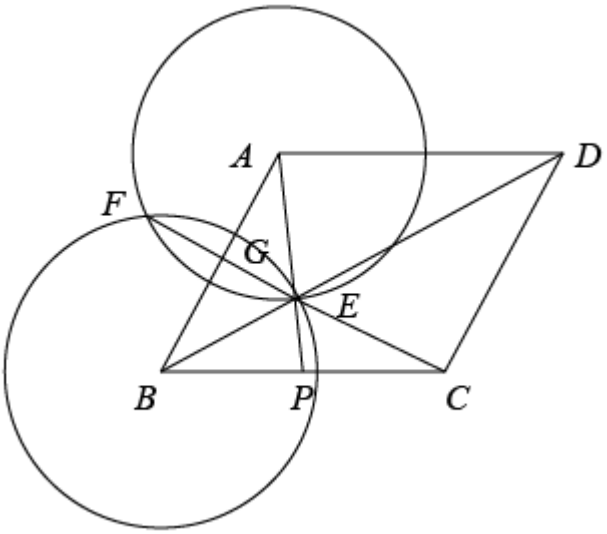
∴$OB=3x=3\sqrt{2}$，

∵平行四边形$ABCD$，

∴$BD=2OB=6\sqrt{2}$；

【小问2详解】

解：如图，



∵⊙A与⊙B相交于E、F，

∴$AB\perp EF$，

由（1）②知点E是△ABC的重心，

又F在直线CE上，

∴CG是△ABC的中线，

∴$AG=BG=\frac{1}{2}AB$，$GE=\frac{1}{2}CE$，

∵$CE=\sqrt{2}AE$，

∴$GE=\frac{\sqrt{2}}{2}AE$，$CG=CE+GE=\frac{3\sqrt{2}}{2}AE$，

在$Rt\triangle AGE$中，由勾股定理，得

$AG^2=AE^2-GE^E=AE^2-(\frac{\sqrt{2}}{2}AE)^2=\frac{1}{2}AE^2$,

∴$AG=\frac{\sqrt{2}}{2}AE$,

$\therefore AB=2AG=\sqrt{2}\,AE$，

在 $Rt\triangle BGC$ 中，由勾股定理，得

$BC^2=BG^2+CG^2=\frac{1}{2}AE^2+(\frac{3\sqrt{2}}{2}AE)^2=5AE^2$，

$\therefore BC=\sqrt{5}\,AE$，

$\therefore \frac{AB}{BC}=\frac{\sqrt{2}AE}{\sqrt{5}AE}=\frac{\sqrt{10}}{5}$.

【点睛】本题考查平行四边形的性质，菱形的判定，重心的性质，勾股定理，相交两圆的公共弦的性质，本题属圆与四边形综合题目，掌握相关性质是解题的关键，属是考常考题目.