上海教育出版社

国家教材委员会专家委员会审核通过
2024

义务教育教科书

（五·四学制）

数学



九年级

上册

上海教育出版社

上海教育出版社

义务教育教科书

（五·四学制）

数学

九年级

上册

主编　李大潜

上海教育出版社

上海教育出版社

主　　编：李大潜

本册主编：王志强

本册编写人员：张建国　蔡志杰　周子翔　顾跃平　胡　军　陈月兰　应坚刚　朱　雁

责任编辑：张莹莹　周赟昊

装帧设计：王　捷　周　吉

本册教科书中的图片由图虫·创意等图片网站提供

义务教育教科书（五·四学制）　数学　九年级　上册

出　版　上海教育出版社（上海市闵行区号景路159弄C座）

版权所有·未经许可不得采用任何方式擅自复制或使用本产品任何部分·违者必究

主编的话

世间的万事万物都有数和形这两个侧面，数学这门学科是忽略了事物的其他属性，仅仅从数量关系和空间形式的角度来研究现实世界的.

初中的数学，介于小学数学与高中数学之间，以往偏向于直观的数学教学将开始逐步走向理性的阶段，对学生逻辑思维的训练会提出较高的要求，其认识也将不断得到深化.

数学是一门重理解和思考的学科. 数学学得好，主要看三条：一是理解要深入，二是运作要熟练，三是表达要清晰. 这儿所提的“运作”，泛指推理及计算. 这三者中最重要的是理解，只有理解深入，才能实现运作熟练和表达清晰这样一些外在层面上的表现，才能真正掌握数学的精髓.

这些年参加了上海市的一些基础数学教科书的编写工作，常常听到一种说法：数学是绝大多数学生一生中学得最多的一门功课，不少学生对数学是喜欢和热爱的，但不太注意对数学真正的理解和感悟，花费了不少时间去刷题，学习负担虽重，却远未达到应有的收获；还有相当一部分学生觉得数学抽象、难懂、神秘，从而望而生畏，甚至避之唯恐不及. 所有这些，都不是我们希望看到的.

我们希望通过教师及学生的共同努力，使数学成为一门容易为学生接受，真正喜闻乐见、可近可亲的课程；不仅负担不重，而且愈学愈想学，愈学愈有趣味，愈学愈觉得数学内容丰富、奥妙无穷，深深地为其吸引和陶醉. 这是我们的一个理想，并相信它是一定可以实现的.

为了实现我们的理想，我们希望这套教科书能真正抓住初中数学的真谛，用朴实无华且单刀直入的方式展现初中阶段应该学习的基本数学内容，努力给学生带来明确而清晰的印象，真正帮助他们理解与掌握有关的数学内容，使学生的数学知识随着年龄的增长逐步增进，充分体现数学学科的育人价值.

本册包含 4 章及 2 个实践活动. 在“二次函数”一章中，学习二次函数的图像与性质，确定二次函数表达式的方法，以及二次函数与一元二次方程之间的联系. 在“相似三角形”一章中，学习相似三角形的性质. 在“三角初步”一章中，学习锐角的正弦、余弦和正切，建立直角三角形中边与角之间的数量关系. 在“投影与视图”一章中，学习中心投影、平行投影和三视图，建立立体图形与平面图形的关系. 在综合与实践中，将从数学角度探寻测量高度的方法，制作测量工具，还将研究城市原点问题.

目　录

第 27 章　二次函数



27.1　二次函数的概念　2

27.2　二次函数的图像与性质　5

27.3　确定二次函数的表达式　21

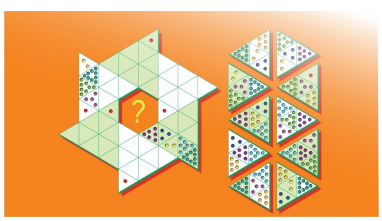
27.4　二次函数与一元二次方程　26

27.5　二次函数的简单应用　33

内容提要　38

复习题　40

第 28 章　相似三角形



28.1　成比例的线段　44

28.2　相似三角形　54

28.3　相似多边形　69

28.4　位似多边形　72

阅读材料　78

黄金分割

三角形的垂心

内容提要　82

复习题　83

第 29 章 三角初步



29.1 锐角的正弦、余弦与正切 86

29.2 解直角三角形 97

阅读材料 107

直角三角形中锐角的正弦、余弦与正切之间的关系

内容提要 108

复习题 109

第 30 章 投影与视图



30.1 投影 113

30.2 三视图 123

30.3 立体模型的制作 136

内容提要 141

复习题 142



综合与实践

探寻测量高度的方法 145

城市原点 148

附录 部分中英文词汇索引 151



第27章

二次函数

我们已经学习了正比例函数、一次函数和反比例函数，初步了解了函数的概念. 在本章中，我们将学习二次函数. 实际生活中，喷水池喷头向周围射出的一条条水线，运动员推出的铅球的运动轨迹等，其所呈现出的曲线形状都可以用二次函数来表示.

与前述的函数不同，二次函数有最大值或最小值，其图像是左右对称的. 学习本章时，应注意体会和掌握函数图像与函数性质之间的对应关系，深入理解二次函数与一元二次方程之间的内在联系.

本章展现了函数与方程的关联以及数形结合的思想，为将来继续学习更一般意义下的函数奠定了基础.

27.1 二次函数的概念

设正方形的边长是 x cm，面积是 y cm^2. 当 x 在一定范围内变化时，面积 y 也随之变化，y 关于 x 的函数表达式是 $y=x^2$.

问题 （1）一个边长为 4 cm 的正方形，若它的边长增加 x cm，相应的面积增加 y cm^2，如图 27-1-1 所示. y 关于 x 的函数表达式是什么?

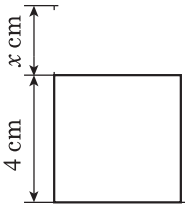


图 27-1-1

（2）将一根 40 cm 长的铁丝分为两段，再分别将每一段弯折成一个正方形(不计损耗)，设其中一段铁丝长为 x cm，两个正方形的面积之和为 y cm^2，如图 27-1-2(1)和图 27-1-2(2)所示. y 关于 x 的函数表达式是什么?



(1)　　(2)

图 27-1-2

问题(1)所要求的函数表达式是

$$y=(x+4)^2-4^2,$$

即

$$y=x^2+8x.$$

问题(2)所要求的函数表达式是

$$y=\left(\frac{x}{4}\right)^2+\left(\frac{40-x}{4}\right)^2,$$

即

$$y=\frac{1}{8}x^2-5x+100.$$

可以看到，上述三个函数表达式 $y=x^2$，$y=x^2+8x$，$y=\frac{1}{8}x^2-5x+100$ 的右边都是关于自变量 x 的二次式.

形如 $y=ax^2+bx+c$（a、b、c 是常数，且 $a\neq0$）的函数叫作**二次函数**. 二次函数自变量 x 的取值范围是一切实数.

在实际问题中，两个变量满足二次函数关系特指满足其表达式的特征.

例 1 圆柱的体积公式是 $V=\pi r^2h$，其中 V 是圆柱的体积，r 是圆柱底面的半径，h 是圆柱的高.

（1）当 r 是常量时，V 是 h 的什么函数？

（2）当 h 是常量时，V 是 r 的什么函数？

解 （1）当 r 是常量时，πr^2h 是关于 h 的一次单项式，故 V 是 h 的一次函数（正比例函数）.

（2）当 h 是常量时，πr^2h 是关于 r 的二次单项式，故 V 是 r 的二次函数.

例 2 某厂七月份的产值是 100 万元，设第三季度每个月产值的增长率相同，都为 x（$x>0$），九月份的产值为 y 万元. 写出 y 关于 x 的函数表达式及自变量 x 的取值范围.

解 七月份产值为 100 万元，月增长率为 x，则八月份产值为 $100(1+x)$ 万元，九月份产值为 $100(1+x)^2$ 万元.

所以，y 关于 x 的函数表达式是

$$y=100(1+x)^2,$$

即

$$y=100x^2+200x+100,$$

其中自变量 x 的取值范围是 $x>0$.

例 3 用长为 20 m 的篱笆，一面靠墙（墙的长度超过 20 m），围成一个矩形花圃，如图 27-1-3 所示. 设 AB 的长为 x m，花圃的面积为 y m^2，求 y 关于 x 的函数表达式及自变量 x 的取值范围.

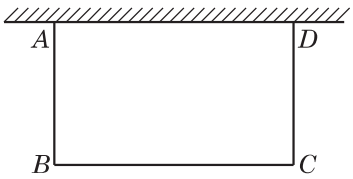


图 27-1-3

解 在矩形 $ABCD$ 中，$AB=x$，则 $BC=20-2x$，所以 y 关于 x 的函数表达式是

$$y=x(20-2x),$$

即

$$y=-2x^2+20x.$$

由边长的实际意义，知

$$x>0，20-2x>0，$$

解得

$$0<x<10.$$

所以，自变量 x 的取值范围是 $0<x<10$.

课堂练习 27.1

1. 下列函数中，哪些是二次函数？

(1) $y=\frac{3}{4}x$；　　(2) $y=x(2x-1)$；

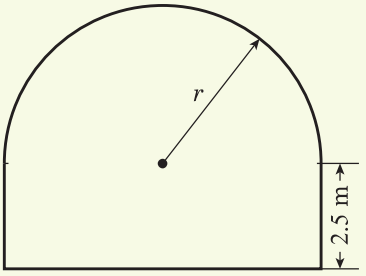
(3) $y=(x+2)^2-3$；　　(4) $y=(x+4)^2-x^2$.

2. 已知二次函数 $y=2x^2-3x-2$.

(1) 当 $x=-\frac{2}{3}$ 时，求 y 的值；

(2) 当 $x=0$ 时，求 y 的值.

3. 一条隧道的横截面如图所示，它的上部是一个半圆，下部是一个矩形，矩形的一条边长为 2.5 m. 如果隧道下部的宽度大于 8 m 但不超过 12 m，求隧道横截面的面积 S(单位：m^2)关于上部半圆半径 r(单位：m)的函数表达式及自变量 r 的取值范围.



(第 3 题)

27.2 二次函数的图像与性质

在一次函数的研究中，我们采用了从特殊到一般的方法，经历了利用图像直观地探索函数性质的过程. 类似地，我们也将从特殊的二次函数 $y=ax^2$（a 是常数，且 $a\neq0$）入手研究其图像与性质，再逐步过渡到对一般的二次函数 $y=ax^2+bx+c$（a、b、c 是常数，且 $a\neq0$）的研究.

1. 二次函数 $y=ax^2(a\neq0)$ 的图像与性质

首先考察二次函数 $y=x^2$.

在平面直角坐标系中，按照下列步骤画二次函数 $y=x^2$ 的图像.

（1）列表：取自变量 x 的一些值，计算出相应的函数值 y，见表 27-1.

表 27-1

x	…	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	…
$y=x^2$	…	4	$\frac{9}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4	…

（2）描点：分别以所取 x 的值和相应的函数值 y 作为点的横坐标和纵坐标，描出这些坐标所对应的各点.

（3）连线：用光滑的曲线将描出的点顺次连接起来，得到函数 $y=x^2$ 的图像，如图 27-2-1 所示.

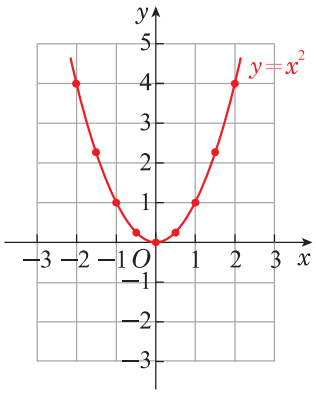


图 27-2-1

二次函数 $y=x^2$ 的图像是一条曲线，这类特殊形状的曲线是抛物线. 二次函数 $y=x^2$ 的图像也可称为抛物线 $y=x^2$.

一般地，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像是抛物线，称为抛物线 $y=ax^2+bx+c$. 这时，$y=ax^2+bx+c$ 是这条抛物线的表达式.



观察

抛物线 $y=x^2$ 有什么性质？

通过观察可以看到，抛物线 $y=x^2$ 开口向上，分别向左上方和右上方无限延伸.

还可以看出，y 轴是抛物线 $y=x^2$ 的对称轴. 抛物线 $y=x^2$ 与其对称轴的交点 $O(0,0)$ 称为抛物线 $y=x^2$ 的顶点，它也是抛物线 $y=x^2$ 的最低点.

因为抛物线 $y=x^2$ 上横坐标互为相反数的两点总有相同的纵坐标，所以抛物线 $y=x^2$ 关于 y 轴对称.

此外，在对称轴左侧，图像下降；在对称轴右侧，图像上升.

也就是说，当 $x<0$ 时，随着自变量 x 的增大，相应的函数值 y 减小；当 $x>0$ 时，随着自变量 x 的增大，相应的函数值 y 也增大. 而当 $x=0$ 时，二次函数 $y=x^2$ 取到最小值，最小值为 0.

例 1 在同一平面直角坐标系中，分别画出二次函数 $y=x^2$，$y=\frac{1}{2}x^2$ 和 $y=2x^2$ 的图像.

解 通过列表(表 27-2)、描点、连线，分别画出函数 $y=x^2$，$y=\frac{1}{2}x^2$ 和 $y=2x^2$ 的图像，如图 27-2-2 所示.

表 27-2

x	…	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	…
$y=x^2$	…	$\frac{9}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	…
$y=\frac{1}{2}x^2$	…	$\frac{9}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{8}$	…
$y=2x^2$	…	$\frac{9}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$	…

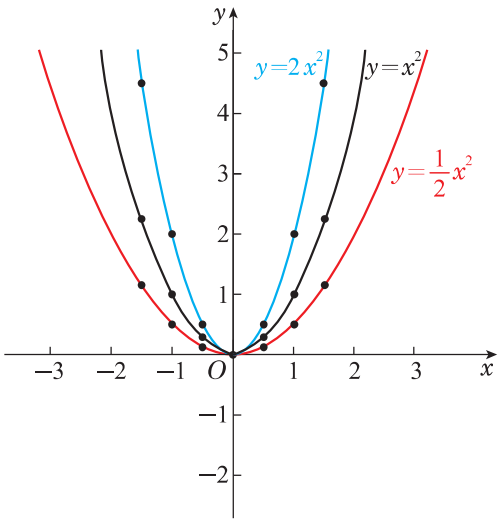


图 27-2-2

思考

图 27-2-2 中的三条抛物线有什么共同特点？

当 $a>0$ 时，$y=ax^2$ 的图像与性质如下：

开口向上，无限延伸，对称轴是 y 轴，顶点是原点，它是抛物线的最低点. 在对称轴左侧，图像下降；在对称轴右侧，图像上升. a 越大，抛物线的开口越小.

相应地，当 $x<0$ 时，函数值 y 随着自变量 x 的增大而减小；而当 $x>0$ 时，函数值 y 随着自变量 x 的增大而增大. 当 $x=0$ 时，二次函数 $y=ax^2$ 取到最小值，最小值为 0.

类似地，我们可以研究当 $a<0$ 时，二次函数 $y=ax^2$ 的图像与性质.

思考

请在同一平面直角坐标系中，分别画出二次函数 $y=-x^2$，$y=-\frac{1}{2}x^2$ 和 $y=-2x^2$ 的图像，并比较它们的相同和不同之处.

当 $a<0$ 时，$y=ax^2$ 的图像与性质如下：

开口向下，无限延伸，对称轴是 y 轴，顶点是原点，它是抛物线的最高点. 在对称轴左侧，图像上升；在对称轴右侧，图像下降. $|a|$ 越大，抛物线的开口越小.

相应地，当 $x<0$ 时，函数值 y 随着自变量 x 的增大而增大；而当 $x>0$ 时，函数值 y 随着自变量 x 的增大而减小. 当 $x=0$ 时，二次函数 $y=ax^2$ 取到最大值，最大值为 0.

课堂练习 27.2(1)

1. 在同一平面直角坐标系中，分别画出下列函数的图像：

(1) $y=3x^2$；

(2) $y=-3x^2$.

2. 写出下列抛物线的开口方向、对称轴和顶点：

(1) $y=\frac{1}{3}x^2$；

(2) $y=-\frac{1}{3}x^2$.

2. 二次函数 $y=a(x+m)^2+h(a\neq0)$ 的图像与性质

例 2 在同一平面直角坐标系中，分别画出二次函数 $y=\frac{1}{2}x^2$，$y=\frac{1}{2}x^2+2$ 和 $y=\frac{1}{2}x^2-2$ 的图像.

解 通过列表(表 27-3)、描点和连线，分别画出函数 $y=\frac{1}{2}x^2$，$y=\frac{1}{2}x^2+2$ 和 $y=\frac{1}{2}x^2-2$ 的图像，如图 27-2-3 所示.

表 27-3

x	…	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	0	1	$\frac{3}{2}$	2	…
$y=\frac{1}{2}x^2$	…	2	$\frac{9}{8}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{8}$	2	…
$y=\frac{1}{2}x^2+2$	…	4	$\frac{25}{8}$	$\frac{5}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	$\frac{25}{8}$	4	…
$y=\frac{1}{2}x^2-2$	…	0	$-\frac{7}{8}$	$-\frac{3}{2}$	-2	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{7}{8}$	0	…

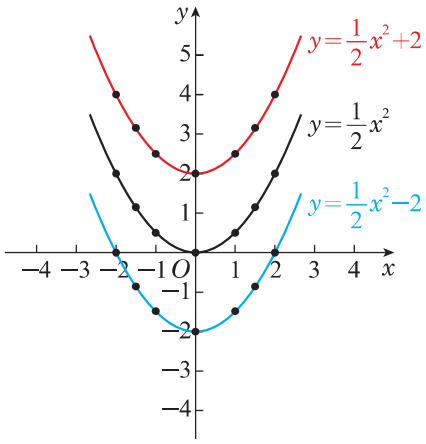


图 27-2-3

观察

图 27-2-3 中的三条抛物线的开口方向、对称轴和顶点分别是什么？

抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2+2$，$y=\frac{1}{2}x^2-2$ 与抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 分别有什么关系？

观察图像可以发现，将抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 向上平移 2 个单位长度，就得到抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2+2$. 抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2+2$ 的对称轴仍为 y 轴，顶点为(0,2).

类似地，抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2-2$ 可由抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 向下平移 2 个单位长度得到，对称轴仍为 y 轴，顶点为(0,−2).

思考

请在同一平面直角坐标系中，分别画出函数 $y=-\frac{1}{2}x^2$，$y=-\frac{1}{2}x^2+2$ 和 $y=-\frac{1}{2}x^2-2$ 的图像，并指出它们的开口方向、对称轴和顶点，以及这三条抛物线之间的关系.

归纳

抛物线 $y=ax^2+h$ 能由抛物线 $y=ax^2$ 平移得到吗？你能归纳出抛物线 $y=ax^2+h$ 的性质吗？

抛物线 $y=ax^2+h$ 可由抛物线 $y=ax^2$ 向上(若 $h>0$)或向下(若 $h<0$)平移 $|h|$ 个单位长度得到，对称轴仍为 y 轴，顶点为 $(0,h)$.

课堂练习 27.2(2)

1. 分别写出抛物线 $y=2x^2$，$y=2x^2+3$ 和 $y=2x^2-3$ 的开口方向、对称轴和顶点，并指出抛物线 $y=2x^2+3$，$y=2x^2-3$ 与抛物线 $y=2x^2$ 分别有什么关系.

2. 写出抛物线 $y=3x^2+\frac{1}{2}$ 的顶点，并说明如何由抛物线 $y=3x^2$ 平移得到该抛物线.

例 3 在同一平面直角坐标系中，分别画出二次函数 $y=-\frac{1}{2}x^2$，$y=-\frac{1}{2}(x+1)^2$ 和 $y=-\frac{1}{2}(x-1)^2$ 的图像.

解 通过列表(表 27-4)、描点和连线，分别画出 $y=-\frac{1}{2}x^2$，$y=-\frac{1}{2}(x+1)^2$ 和 $y=-\frac{1}{2}(x-1)^2$ 的图像，如图 27-2-4 所示.

表 27-4

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$y=-\frac{1}{2}x^2$	…	$-\frac{9}{2}$	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{9}{2}$	…
$y=-\frac{1}{2}(x+1)^2$	…	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{9}{2}$	-8	…
$y=-\frac{1}{2}(x-1)^2$	…	-8	$-\frac{9}{2}$	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2	…

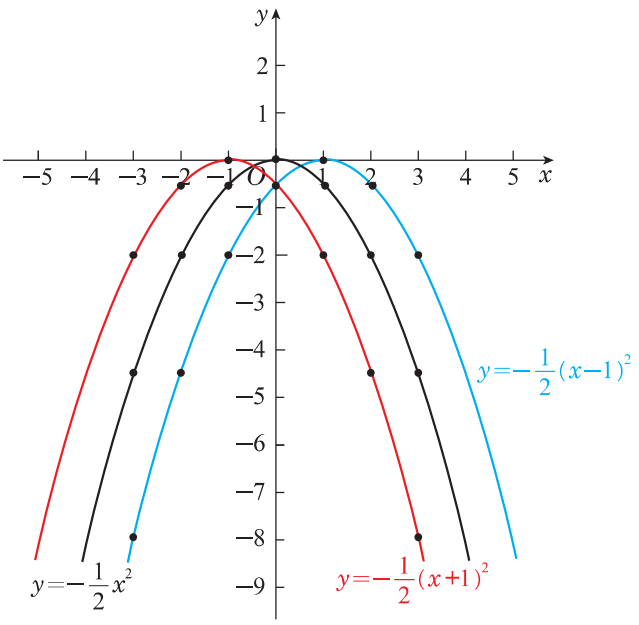


图 27-2-4

观察

图 27-2-4 中的三条抛物线的开口方向、对称轴和顶点分别是什么？抛物线 $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2$，$y=-\frac{1}{2}(x-1)^2$ 与抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 分别有什么关系？

观察图像可以发现，将抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 向左平移 1 个单位长度，就得到抛物线 $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2$. 抛物线 $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2$ 的对称轴为直线 $x=-1$，

顶点为$(-1,0)$.

类似地，抛物线$y=-\frac{1}{2}(x-1)^2$可由抛物线$y=-\frac{1}{2}x^2$向右平移1个单位长度得到，对称轴为直线$x=1$，顶点为$(1,0)$.



思考

请在同一平面直角坐标系中，分别画出函数$y=\frac{1}{2}x^2$，$y=\frac{1}{2}(x+1)^2$和$y=\frac{1}{2}(x-1)^2$的图像，并指出它们的开口方向、对称轴和顶点，以及这三条抛物线之间的关系.



归纳

抛物线$y=a(x+m)^2$能由抛物线$y=ax^2$平移得到吗？你能归纳出抛物线$y=a(x+m)^2$的性质吗？

抛物线$y=a(x+m)^2$可由抛物线$y=ax^2$向左(若$m>0$)或向右(若$m<0$)平移$|m|$个单位长度得到，对称轴为直线$x=-m$，顶点为$(-m,0)$.

课堂练习 27.2(3)

1. 分别写出抛物线$y=2x^2$，$y=2(x+3)^2$和$y=2(x-3)^2$的开口方向、对称轴和顶点，并指出抛物线$y=2(x+3)^2$，$y=2(x-3)^2$与抛物线$y=2x^2$分别有什么关系.

2. 写出抛物线$y=3\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$的顶点，并说明如何由抛物线$y=3x^2$平移得到该抛物线.

例 4 在同一平面直角坐标系中，分别画出二次函数$y=-\frac{1}{2}x^2$和$y=-\frac{1}{2}(x+1)^2+1$的图像，并指出这两条抛物线之间的关系.

解 函数 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 和 $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2+1$ 的图像如图 27-2-5 所示.

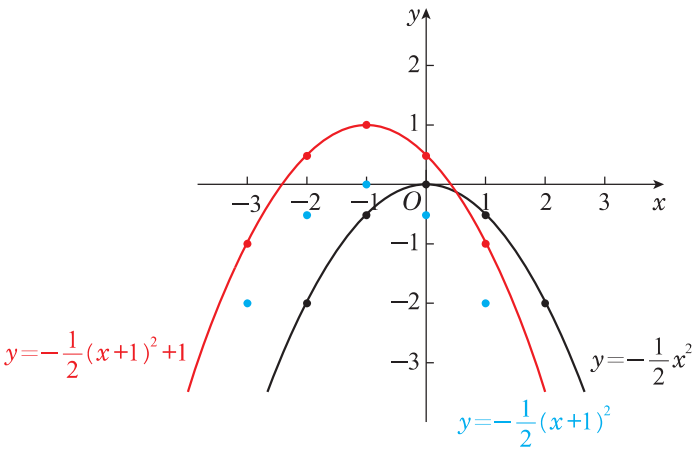


图 27-2-5

观察图像可以发现，抛物线 $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2+1$ 可由抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 先向左平移 1 个单位长度变为抛物线 $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2$，再向上平移 1 个单位长度得到.

归纳

抛物线 $y=a(x+m)^2+h$ 能由抛物线 $y=ax^2$ 平移得到吗？你能归纳出抛物线 $y=a(x+m)^2+h$ 的性质吗？

一般地，抛物线 $y=a(x+m)^2+h$ 的对称轴是直线 $x=-m$，顶点是 $(-m,h)$. 抛物线 $y=a(x+m)^2+h$ 可由抛物线 $y=ax^2$ 平移得到，平移的方向由 m、h 的符号决定，平移的距离由 m、h 的绝对值决定.

实际上，只要明确了 $y=ax^2$ 的顶点 $(0,0)$ 如何平移到 $y=a(x+m)^2+h$ 的顶点 $(-m,h)$，就可以确定相应的抛物线的平移方式.

相应地，得到二次函数 $y=a(x+m)^2+h$ 的性质：

若 $a>0$，当 $x<-m$ 时，函数值 y 随着自变量 x 的增大而减小；当 $x>-m$ 时，函数值 y 随着自变量 x 的增大而增大；当 $x=-m$ 时，函数值 y 取到最小值，最小值为 h.

若 $a<0$，当 $x<-m$ 时，函数值 y 随着自变量 x 的增大而增大；当 $x>-m$ 时，函数值 y 随着自变量 x 的增大而减小；当 $x=-m$ 时，函数值 y 取到最大值，最大值为 h.

例 5 已知抛物线 $y=2(x-1)^2-1$.

（1）写出它的开口方向、对称轴和顶点；

（2）在平面直角坐标系中画出这条抛物线；

（3）判断二次函数 $y=2(x-1)^2-1$ 有最大值还是最小值，并求出自变量 x 的相应取值.

解 （1）抛物线 $y=2(x-1)^2-1$ 的开口向上，对称轴是直线 $x=1$，顶点是(1,−1).

（2）画出抛物线 $y=2(x-1)^2-1$，如图 27-2-6 所示.

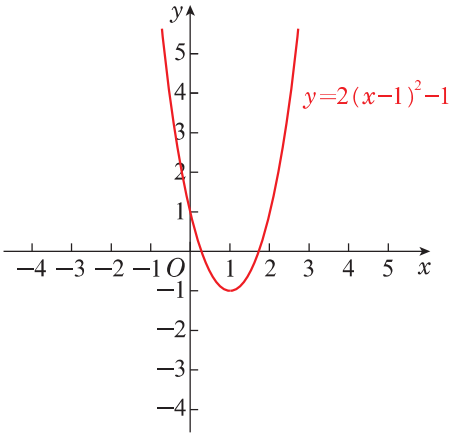


图 27-2-6

（3）由于 $a=2>0$，因此二次函数 $y=2(x-1)^2-1$ 有最小值，当 $x=1$ 时取到最小值，最小值为−1.

课堂练习 27.2(4)

1. 写出下列抛物线的开口方向、对称轴和顶点，并指出如何由抛物线 $y=2x^2$ 平移得到它们.

(1) $y=2(x+3)^2-1$；

(2) $y=2(x-3)^2+1$.

2. 将抛物线 $y=-2x^2$ 平移，使它的顶点移到点 $P(-3,1)$ 的位置，求所得的抛物线的表达式及其对称轴.

3. 写出二次函数 $y=-\frac{1}{2}(x-2)^2-3$ 图像的开口方向、对称轴、顶点以及图像的变化规律. 判断此二次函数有最大值还是最小值，并求出自变量 x 的相应取值.

3. 二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图像与性质

以 $y=x^2-4x+3$ 为例.

由配方，可得

$$y=x^2-4x+3=(x-2)^2-1.$$

由配方的结果，可知抛物线 $y=x^2-4x+3$ 的对称轴是直线 $x=2$，顶点是(2,−1). 根据二次函数图像的对称性列表(表 27-5)、描点，并画出它的图像(图 27-2-7).

表 27-5

x	…	$-\frac{1}{2}$	0	1	2	3	4	$\frac{9}{2}$	…
$y=x^2-4x+3$	…	$\frac{21}{4}$	3	0	−1	0	3	$\frac{21}{4}$	…

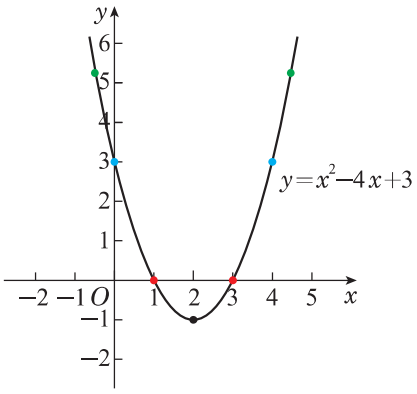


图 27-2-7

从图 27-2-7 可以看出，在对称轴左侧，二次函数 $y=x^2-4x+3$ 的图像下降；在对称轴右侧，图像上升. 也就是说，当 $x<2$ 时，y 随着 x 的增大而减小；当 $x>2$ 时，y 随着 x 的增大而增大；当 $x=2$ 时，y 取到最小值，最小值为 -1.

一般地，通过配方，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 可以化为 $y=a(x+m)^2+h$ 的形式，进而得到其图像与性质. 实际上，

$$y=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

将上式与 $y=a(x+m)^2+h$ 比较，可得

$$m=\frac{b}{2a},\quad h=\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

归纳

你能归纳出抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的性质吗？

抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 可由抛物线 $y=ax^2$ 平移得到，对称轴是直线 $x=-\frac{b}{2a}$，顶点是 $\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$.

相应地，就可以得到二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的性质.

讨论

请总结出二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的性质.

例 6 写出二次函数 $y=-2x^2-6x+4$ 图像的开口方向、对称轴、顶点以及图像的变化规律. 判断此二次函数有最大值还是最小值，并求出自变量 x 的相应取值.

解 由配方，得

$$y=-2x^2-6x+4=-2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{17}{2}.$$

因为 $a=-2<0$，所以此二次函数图像的开口向下，对称轴是直线 $x=-\frac{3}{2}$，顶点是 $\left(-\frac{3}{2},\frac{17}{2}\right)$. 在对称轴左侧，图像上升；在对称轴右侧，图像下降.

当 $x=-\frac{3}{2}$ 时，二次函数 $y=-2x^2-6x+4$ 取到最大值，最大值为 $\frac{17}{2}$.

课堂练习 27.2(5)

1. 写出下列二次函数图像的开口方向、对称轴和顶点. 判断这些二次函数有最大值还是最小值，并求出自变量 x 的相应取值.

(1) $y=x^2+6x-3$；　　(2) $y=x^2+4x+4$；

(3) $y=\frac{5}{2}x-2-3x^2$；　　(4) $y=-3x^2+2x$.

2. 已知二次函数 $y=-(x+1)(x-3)$.

(1) 写出这个二次函数图像的开口方向、对称轴和顶点. 判断此二次函数有最大值还是最小值，并求出自变量 x 的相应取值.

(2) 在平面直角坐标系中，画出这个函数的图像，并指出图像的变化规律.

习题 27.1—27.2



1. 判断下列函数是不是二次函数：

（1）$y=(x-5)^2-x^2$；

（2）$y=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$；

（3）$y=\sqrt{2}x(x-5)$；

（4）$y=mx^2+nx+p$（m、n、p 为常数）.

2. 已知函数 $y=(m^2-1)x^2+(m+1)x+m$，m 是常数.

（1）当 m 满足条件_____时，y 是 x 的二次函数；

（2）当 m 满足条件_____时，y 是 x 的一次函数.

3. 二次函数 $y=-6x^2$ 图像的开口向_____，顶点是_____，对称轴是_____；该二次函数在 $x=$_____时，取到最_____值_____.

4. 如果二次函数 $y=(2m-1)x^2+m$ 有最大值，那么实数 m 的取值范围是_____.

5. 抛物线 $y=3(x-2)^2$ 的开口向_____，对称轴是_____，顶点坐标是_____；当自变量 $x=$_____时，相应的二次函数取到最_____值_____；当自变量 x 的取值范围是_____时，y 随着 x 的增大而增大.

6. 分别写出抛物线 $y=-2x^2$ 经过下列两次平移后得到的抛物线表达式：

（1）先向左平移 5 个单位长度，再向下平移 $\frac{3}{2}$ 个单位长度；

（2）先向右平移 $\frac{1}{3}$ 个单位长度，再向上平移 4 个单位长度.

7. 二次函数 $y=\frac{1}{3}x^2$ 与 $y=-\frac{1}{3}x^2$ 的图像有什么共同特征和不同特征？它们的图像有怎样的对称关系？如果画出了其中一个函数的图像，如何用简单的方法画出另外一个函数的图像？

8. 已知二次函数 $y=(1+2k)x^2$，当 k 为何值时，它的图像开口向上？当 k 为何值时，它的图像开口向下？

9. 通过配方，将下列函数的表达式化为 $y=a(x+m)^2+h$ 的形式. 判断这些二次函数有最大值还是最小值，并求出自变量 x 的相应取值.

(1) $y=2x^2+4x+5$；

(2) $y=-\frac{1}{3}x^2-2x+5$.

10. 将抛物线 $y=\frac{1}{3}x^2$ 向上平移 1 个单位长度，求平移后所得的抛物线表达式，并判断它的开口方向，写出对称轴和顶点.

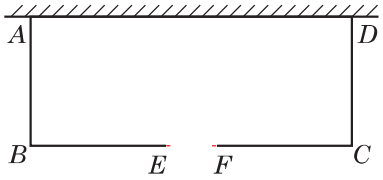
11. 将抛物线 $y=-3x^2$ 向左平移 2 个单位长度，求平移后所得的抛物线表达式. 判断平移后的抛物线有最高点还是最低点，并求出其坐标.

B

12. 若二次函数 $y=mx^{m^2-7}$ 的图像有最高点，则 $m=$_____.

13. 已知 m 是常数，如果抛物线 $y=(x+m)^2+m+1$ 的对称轴是直线 $x=1$，那么它的顶点坐标是_____.

14. 用长为 20 m 的篱笆，一面靠墙(墙的长度超过 21 m)，围成一个矩形花圃 $ABCD$. 在边 BC 上预留一个长度为 1 m 的出口 EF，如图所示. 设边 AB 的长为 x m，花圃的面积为 y m^2，求 y 关于 x 的函数表达式及自变量 x 的取值范围.



(第 14 题)

15. 已知二次函数 $y=\frac{1}{2}x^2-2x$.

（1）通过配方，将该二次函数的表达式化为 $y=a(x+m)^2+h$ 的形式；

（2）在平面直角坐标系中画出该函数的图像.

16. 已知二次函数 $y=x(x-2)+2$.

（1）通过配方，将该二次函数的表达式化为 $y=a(x+m)^2+h$ 的形式，写出其图像的顶点坐标. 判断此二次函数有最大值还是最小值，并求出自变量 x 的相应取值.

（2）说明抛物线 $y=x(x-2)+2$ 是如何由抛物线 $y=x^2$ 平移得到的.

27.3 确定二次函数的表达式

我们已经知道，确定一次函数的表达式 $y=kx+b(k\neq0)$，就是要确定 k 和 b 的值. 采用待定系数法，将一次函数图像上两点的坐标代入其函数表达式，列出关于 k 和 b 的二元一次方程组，就可求得 k 和 b 的值.

类似地，为确定二次函数的表达式 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$，就要确定三个系数 a、b、c 的值. 而为了确定 a、b、c 的值，一般需要三个关于 a、b、c 的方程. 如果我们知道一个二次函数图像上三个点的坐标，就可列出关于 a、b、c 的三元一次方程组，并通过求解方程组得到 a、b、c 的值.

例 1 已知一个二次函数的图像经过 $A(0,1)$、$B(1,3)$、$C(-1,1)$三点，求这个二次函数的表达式.

解 设所求二次函数的表达式为 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$，由于其图像经过点$A(0,1)$、$B(1,3)$、$C(-1,1)$，因此可以得到关于 a、b、c 的三元一次方程组：

$$\begin{cases} a\cdot0^2+b\cdot0+c=1, \\ a\cdot1^2+b\cdot1+c=3, \\ a\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)+c=1, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} c=1, & ① \\ a+b+c=3, & ② \\ a-b+c=1. & ③ \end{cases}$$

将①分别代入②和③中，得到

$$\begin{cases} a+b=2, \\ a-b=0. \end{cases}$$

解这个二元一次方程组，得 $a=1$，$b=1$.

所以，三元一次方程组的解是 $\begin{cases} a=1, \\ b=1, \\ c=1. \end{cases}$

因此，这个二次函数的表达式为 $y=x^2+x+1$.

例 2 已知一个二次函数的图像经过点 $A(4,5)$、$B(2,-3)$、$C(1,-4)$.

(1) 求这个二次函数的表达式.

(2) 写出这个二次函数图像的开口方向、对称轴和顶点以及图像的变化规律. 判断该图像有最高点还是最低点，并求出其坐标.

解 (1) 设所求二次函数的表达式为 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$. 根据题意，得

$$\begin{cases} 16a+4b+c=5, & ① \\ 4a+2b+c=-3, & ② \\ a+b+c=-4. & ③ \end{cases}$$

①−②，得 $12a+2b=8.$ ④

②−③，得 $3a+b=1.$ ⑤

由④和⑤，解得 $a=1$，$b=-2$.

将 $a=1$，$b=-2$ 代入③中，得 $c=-3$.

因此，这个二次函数的表达式为 $y=x^2-2x-3$.

(2) 因为 $y=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$，所以这个二次函数的图像开口向上，对称轴是直线 $x=1$，顶点是$(1,-4)$. 在对称轴左侧，图像下降，在对称轴右侧，图像上升. 该图像有最低点，其坐标是$(1,-4)$，如图 27-3-1 所示.

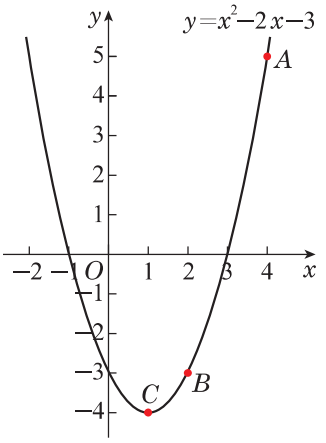


图 27-3-1

课堂练习 27.3(1)

1. 已知下列二次函数图像上三点的坐标，分别求二次函数的表达式：

(1) $(0,10)$、$(1,5)$、$(2,2)$；

(2) $(-1,6)$、$(-2,0)$、$(-3,-2)$.

2. 已知一个二次函数的图像经过点 $A(-1,0)$、$B(0,3)$、$C(2,3)$.

(1) 求这个二次函数的表达式;

(2) 如果点 $P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$在这个二次函数的图像上，且 $x_1<x_2<1$，试比较 y_1 与 y_2 的大小.

通过配方，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 可以化为 $y=a(x+m)^2+h$ 的形式，它的图像是抛物线，其对称轴是直线 $x=-m$，顶点是$(-m,h)$，并且 a 的符号决定了抛物线的开口方向，a 的绝对值决定了抛物线的开口大小.

为确定二次函数的表达式 $y=a(x+m)^2+h(a\neq0)$，就是要确定 a、m、h 的值. 在已知顶点坐标$(-m,h)$或对称轴直线 $x=-m$ 的情况下，通常需要补充适当的条件，组成关于 a、m、h 的三元一次方程组，以此求得 a、m、h 的值.

例 3 已知一个二次函数图像的顶点坐标为$(2,-3)$，且过点 $A(3,-1)$. 求这个二次函数的表达式.

解 由二次函数图像的顶点坐标为$(2,-3)$，可设这个函数的表达式为

$$y=a(x-2)^2-3\ (a\neq0).$$

因为该二次函数的图像过点 $A(3,-1)$，所以 $a(3-2)^2-3=-1$，解得 $a=2$.

所以，这个二次函数的表达式为 $y=2(x-2)^2-3$，即 $y=2x^2-8x+5$.

例 4 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像过点 $A(1,0)$和点 $B(0,3)$，对称轴是直线 $x=-1$. 求这个二次函数的表达式.

解 由二次函数图像的对称轴是直线 $x=-1$，可设这个函数的表达式为

$$y=a(x+1)^2+h.$$

因为该二次函数的图像过点 $A(1,0)$、$B(0,3)$，所以

$$\begin{cases} a\cdot2^2+h=0, \\ a+h=3. \end{cases}$$

解得 $a=-1$，$h=4$.

所以，这个二次函数的表达式为 $y=-(x+1)^2+4$，即 $y=-x^2-2x+3$.

例 5 已知二次函数 $y=x^2+2(m-3)x+9$ 图像的顶点在 x 轴上，求这个二次函数的表达式.

解 由 $y=x^2+2(m-3)x+9=(x+m-3)^2-m^2+6m$，可知图像的顶点坐标为$(-m+3,-m^2+6m)$.

因为顶点在 x 轴上，所以$-m^2+6m=0$，解得 $m=0$ 或 $m=6$.

于是，这个二次函数的表达式为 $y=x^2-6x+9$ 或 $y=x^2+6x+9$.

探究

已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的大致图像如图 27-3-2 所示，其中顶点是 $M(1,-1)$. 请补充适当的条件并确定这个二次函数的表达式.

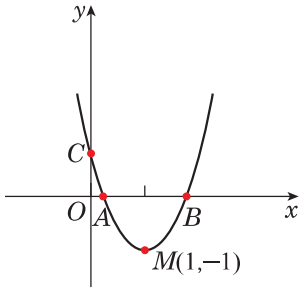


图 27-3-2

课堂练习 27.3(2)

1. 已知一个二次函数图像的顶点坐标为(3,1)，且过点 $M(4,-5)$. 求这个二次函数的表达式.

2. 已知一个二次函数的图像过点 $A(-2,0)$和点 $B(0,-3)$，对称轴是直线 $x=2$. 求这个二次函数的表达式.

3. 已知二次函数 $y=x^2+(2m+2)x+2m+c$，其图像的顶点在 y 轴上，且过点(1,5). 求这个二次函数的表达式.

习题 27.3



1. 已知一个二次函数的图像经过 $A(0,3)$、$B(1,4)$、$C(-2,-5)$三点，求这个二次函数的表达式，并画出其图像.

2. 已知抛物线 $y=-2x^2+bx+c$ 的顶点为 $M(2,0)$，求这个抛物线的表达式.

3. 已知一个抛物线的对称轴是直线 $x=-3$，该抛物线与 x 轴的一个交点的横坐标为-1，与 y 轴交点的纵坐标为 10. 求该抛物线的表达式.

4. 已知一个二次函数的图像经过点 $A(-2,3)$，与 y 轴交点的纵坐标为-1，对称轴是直线 $x=-2$. 求这个二次函数的表达式.



5. 已知一个二次函数的最小值为 1，其图像的对称轴是直线 $x=-1$，与 y 轴交于点 $C(0,2)$. 求这个二次函数的表达式及其图像的顶点坐标.

6. 已知二次函数 $y=x^2+2(m-2)x+5$ 图像的顶点在坐标轴上，求这个二次函数的表达式.

27.4 二次函数与一元二次方程

我们已经了解了一次函数与一次方程之间的联系，类似地，本节我们来研究二次函数与一元二次方程之间的联系.

例 1 已知二次函数 $y=x^2-4x+3$，自变量 x 分别取何值时，相应的函数值 y 等于 0 和 -1?

解 若 $y=0$，则 $x^2-4x+3=0$. 解这个一元二次方程，得 $x=1$ 或 $x=3$. 因此，当 $x=1$ 或 $x=3$ 时，$y=0$.

类似地，若 $y=-1$，则 $x^2-4x+3=-1$，即 $x^2-4x+4=0$，可解得 $x=2$. 因此，当 $x=2$ 时，$y=-1$.

一般地，已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的函数值为 t，要求其自变量 x 的值，总可化为求解关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=t$，即 $ax^2+bx+c-t=0$. 反过来，解一元二次方程 $ax^2+bx+c=t$，又可以看作已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的函数值为 t，求自变量 x 的值.

另外，如果二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像与 x 轴有交点，那么由交点的纵坐标为 0，即 $y=0$，可知交点的横坐标一定是相应的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的实数根. 也就是说，只要求出一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的实数根，就能得出抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴交点的坐标.

例 2 分别求下列二次函数的图像与 x 轴交点的坐标：

(1) $y=2x^2-5x-3$；

(2) $y=(x-1)(x+3)$；

(3) $y=-(x+1)^2$.

解 (1) 由 $y=0$，得一元二次方程 $2x^2-5x-3=0$，解得 $x=3$ 或 $x=-\frac{1}{2}$.

所以，二次函数 $y=2x^2-5x-3$ 的图像与 x 轴两个交点的坐标分别是 $(3,0)$ 和 $\left(-\frac{1}{2},0\right)$.

(2) 由 $y=0$，得 $(x-1)(x+3)=0$，解得 $x=1$ 或 $x=-3$.

所以，二次函数 $y=(x-1)(x+3)$ 的图像与 x 轴两个交点的坐标分别是 $(1,0)$ 和 $(-3,0)$.

(3) 由 $y=0$，得 $-(x+1)^2=0$，解得 $x=-1$.

所以，二次函数 $y=-(x+1)^2$ 的图像与 x 轴的交点只有一个，坐标是 $(-1,0)$.

反之，如果知道了抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴两个交点的坐标，就相当于知道了一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个实数根，再加上适当的条件，我们就能确定相应的二次函数表达式.

例 3 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像与 x 轴两个交点的横坐标分别是 3、-1，与 y 轴交点的纵坐标是 $-\frac{3}{2}$. 求这个二次函数的表达式.

解 根据题意，$x=3$ 和 $x=-1$ 是 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根，因此可设二次函数的表达式为 $y=a(x-3)(x+1)$.

由其与 y 轴交点的纵坐标是 $-\frac{3}{2}$，得

$$-\frac{3}{2}=a(0-3)(0+1),$$

解得 $a=\frac{1}{2}$.

本题也可以由抛物线经过三点，直接利用待定系数法求解.

所以，这个二次函数的表达式是 $y=\frac{1}{2}(x-3)(x+1)$，即 $y=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}$.

课堂练习 27.4(1)

1. 分别求下列二次函数的图像与 x 轴交点的坐标：

(1) $y=x^2-5$；　　(2) $y=2x^2-3x+1$；

(3) $y=-x^2+2x+3$；　　(4) $y=3(x-1)(x-2)$.

2. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像与 x 轴有 $A(-2,0)$、$B(4,0)$两个交点，与 y 轴的交点是 $C(0,4)$. 求这个二次函数的表达式.

如图 27-4-1，我们注意到不同的抛物线与 x 轴的交点可能是 2 个、1 个或 0 个，那么如何判断抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴有几个交点呢?

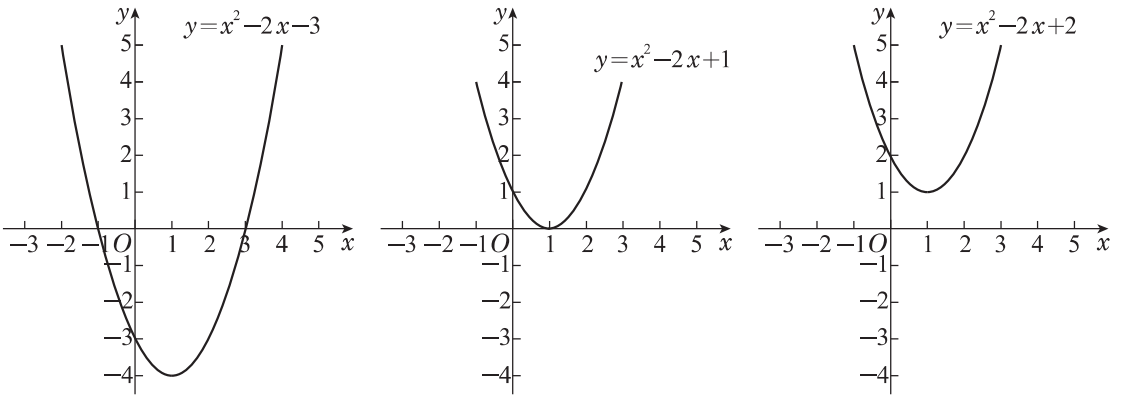


图 27-4-1

我们知道，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴交点的横坐标是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的实数根，而一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的实数根有三种情况：有两个不相等的实数根、有两个相等的实数根、没有实数根. 这分别对应于抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴交点个数的三种情况：有两个交点、有一个交点、没有交点.

又因为一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 实数根的个数可根据该方程的判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 来判断，所以抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴交点的个数也可由相应的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 确定：

(1) 当 $\Delta>0$ 时，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴有两个交点；

（2）当 $\Delta=0$ 时，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴有且只有一个交点；

（3）当 $\Delta<0$ 时，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴没有交点.

上述结论反过来说，也是正确的，即由抛物线与 x 轴交点的个数，也可以确定相应的一元二次方程判别式的值的符号：

（1）当抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴有两个交点时，$\Delta>0$；

（2）当抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴有且只有一个交点时，$\Delta=0$；

（3）当抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴没有交点时，$\Delta<0$.

例 4 判断下列抛物线与 x 轴交点的个数：

（1）$y=2x^2+5x+4$；　　（2）$y=2x^2-2\sqrt{6}x+3$.

解 （1）对于方程 $2x^2+5x+4=0$，

$$\Delta=5^2-4\times2\times4=-7<0.$$

所以，抛物线 $y=2x^2+5x+4$ 与 x 轴没有交点.

（2）对于方程 $2x^2-2\sqrt{6}x+3=0$，

$$\Delta=(-2\sqrt{6})^2-4\times2\times3=0.$$

所以，抛物线 $y=2x^2-2\sqrt{6}x+3$ 与 x 轴有且只有一个交点.

例 5 当实数 m 分别满足什么条件时，抛物线 $y=(m+1)x^2+4mx+4m-3$ 与 x 轴交点个数的情况如下：

（1）有两个交点？

（2）有且只有一个交点？

（3）没有交点？

解 由抛物线的表达式，可知 $m+1\neq0$，对于一元二次方程 $(m+1)x^2+4mx+4m-3=0$，其判别式

$$\Delta=(4m)^2-4(m+1)(4m-3)=-4(m-3).$$

（1）当 $\Delta=-4(m-3)>0$ 且 $m+1\neq0$，即 $m<3$ 且 $m\neq-1$ 时，这条抛物线与 x 轴有两个交点.

（2）当 $\Delta=-4(m-3)=0$ 且 $m+1\neq0$，即 $m=3$ 时，这条抛物线与 x 轴有且只有一个交点.

(3) 当 $\Delta=-4(m-3)<0$ 且 $m+1\neq0$，即 $m>3$ 时，这条抛物线与 x 轴没有交点.

前面我们借助一元二次方程的根来求二次函数图像与 x 轴交点的坐标；反之，我们也可以利用二次函数图像与 x 轴交点的坐标来求一元二次方程的根. 但由于作图或者观察图像时往往存在误差，因此利用图像求得的根通常都是近似的.

例 6 利用二次函数的图像求方程 $2x^2-2x-5=0$ 的正实数根(结果精确到 0.1).

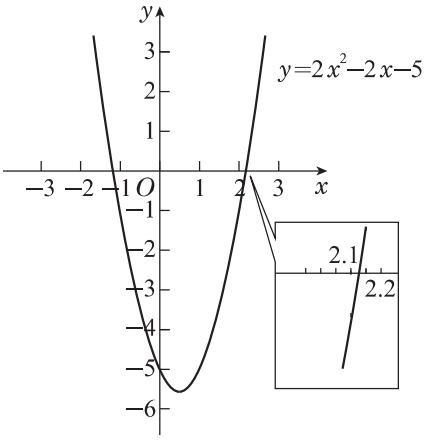
解 令 $y=2x^2-2x-5$，画出其图像，如图 27-4-2 所示.

观察图像可以发现，抛物线 $y=2x^2-2x-5$ 与 x 轴有两个交点，一个交点的横坐标大于 0，一个交点的横坐标小于 0，即 $2x^2-2x-5=0$ 有一正一负两个实数根，其中正实数根在 2 与 3 之间. 分别计算当 $x=2.1$，$x=2.2$，…，$x=2.9$ 时的函数值 y，见表 27-6.

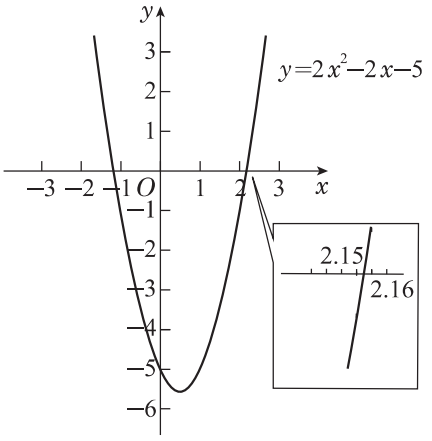
表 27-6

x	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9
y	−0.38	0.28	0.98	1.72	2.5	3.32	4.18	5.08	6.02

因此，方程的正实数根在 2.1 与 2.2 之间，如图 27-4-2(1)所示.



(1)



(2)

图 27-4-2

同样地，分别计算当 $x=2.11$，$x=2.12$，…，$x=2.19$ 时的函数值 y，见表 27-7.

表 27-7

x	2.11	2.12	2.13	2.14	2.15	2.16	2.17	2.18	2.19
y	−0.315 8	−0.251 2	−0.186 2	−0.120 8	−0.055	0.011 2	0.077 8	0.144 8	0.212 2

因此，满足精度要求的方程的正实数根近似为 $x\approx 2.2$，如图 27-4-2(2) 所示.

课堂练习 27.4(2)

1. 判断下列抛物线与 x 轴交点的个数：

(1) $y=x^2-2x-1$；　　(2) $y=x^2-2x+1$；

(3) $y=-x^2-2x-2$；　　(4) $y=(x+3)^2+1$.

2. 当实数 k 分别满足什么条件时，抛物线 $y=kx^2+2(k-1)x+k-1$ 与 x 轴交点个数的情况如下：

(1) 有两个交点？

(2) 有且只有一个交点？

(3) 没有交点？

习题 27.4

A

1. 分别判断下列抛物线与 x 轴有无交点. 若有，求出交点的坐标.

(1) $y=x^2-6x+9$；

(2) $y=5x^2-2\sqrt{5}x$.

2. 设抛物线 $y=3x^2-4x+1$ 与 x 轴的交点为 A、B，求线段 AB 的长.

3. 已知二次函数 $y=25+20x-5x^2$，它的图像与 x 轴的交点分别为 A、B（点 A 在点 B 的左侧），顶点为 C.

（1）求 A、B 的坐标；

（2）求△ABC 的面积.



4. 已知二次函数 $y=x^2-(k+4)x+2k-1$，求证：无论 k 取何值，它的图像与 x 轴总有两个交点.

5. 已知抛物线 $y=x^2-kx+k-2$ 与 x 轴有两个交点 A、B（点 A 在点 B 的左侧），且 $AB=2$. 求抛物线的表达式及 A、B 的坐标.

27.5 二次函数的简单应用

例 1 一位运动员推铅球，铅球的飞行轨迹是一条抛物线. 已知铅球刚出手时在离地面高度为$\frac{8}{5}$ m 的位置 A；铅球出手后，飞出水平距离 3 m 时到达离地面高度 3 m 的位置 B；飞出水平距离 6 m 时到达离地面高度$\frac{16}{5}$ m 的位置 C；铅球的落地点为 D. 设过位置 A 的铅垂线与过位置 D 的水平线相交于点 O，以 O 为原点、OD 为 x 轴、OA 为 y 轴，建立如图 27-5-1 所示的平面直角坐标系.

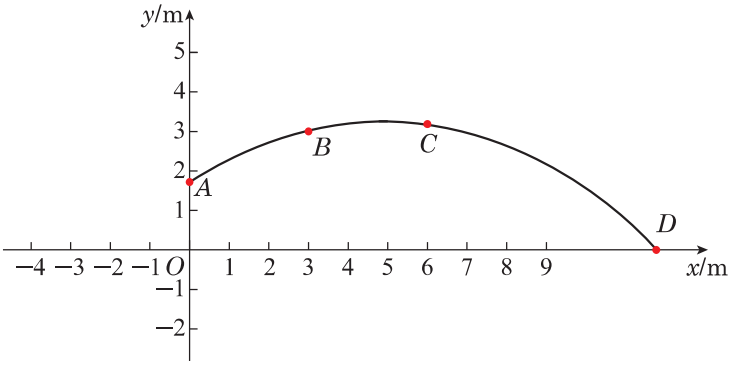


图 27-5-1

(1) 求铅球飞行时离地面的高度 y(单位：m)与飞出的水平距离 x(单位：m)的函数表达式；

(2) 求铅球落地时，飞出的水平距离 OD.

解 (1) 根据题意，设函数的表达式为 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$，这个函数的图像经过 $A\left(0,\frac{8}{5}\right)$、$B(3,3)$、$C\left(6,\frac{16}{5}\right)$三点. 于是，得到关于 a、b、c 的三元一次方程组

$$\begin{cases} c=\dfrac{8}{5}, \\ 9a+3b+c=3, \\ 36a+6b+c=\dfrac{16}{5}. \end{cases}$$

解得 $a=-\dfrac{1}{15}$，$b=\dfrac{2}{3}$，$c=\dfrac{8}{5}$.

所以，所求函数的表达式是 $y=-\dfrac{1}{15}x^2+\dfrac{2}{3}x+\dfrac{8}{5}$.

(2) 根据题意，求飞出的水平距离 OD，就是求点 D 的横坐标.

令 $y=0$，则 $-\dfrac{1}{15}x^2+\dfrac{2}{3}x+\dfrac{8}{5}=0$.

解得 $x=12$ 或 $x=-2$(不符合实际意义，舍去).

所以，飞出的水平距离 OD 为 12 m.

例 2 如图 27-5-2，有一块等腰直角三角形铁皮 ABC，底边 AB 长 20 cm. 在其上截一块矩形铁皮 $EFGD$，边 FG 在 AB 上，顶点 E、D 分别在 CA、CB 上. 设 EF 的长为 x cm，矩形 $EFGD$ 的面积为 y cm^2，试写出 y 关于 x 的函数表达式及自变量 x 的取值范围，并求当 EF 的长为 4 cm 时所截得矩形的面积.

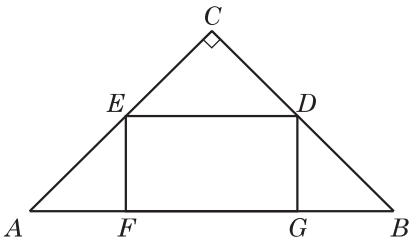


图 27-5-2

解 因为四边形 $EFGD$ 是矩形，所以 $EF=DG$，$\angle EFG=90°$. 所以 $\angle EFA=90°$. 又因为 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，所以 $\angle A=45°$，从而 $\angle AEF=45°$，所以 $AF=EF$. 同理 $GB=DG$. 于是

$$AF=EF=x,\ GB=DG=x,$$

$$FG=AB-AF-GB=20-2x.$$

所以矩形 $EFGD$ 的面积 $y=(20-2x)x=-2x^2+20x$.

由 $0<FG<AB$，得 $0<20-2x<20$，解得 $0<x<10$.

所以，y 关于 x 的函数表达式是 $y=-2x^2+20x$，自变量 x 的取值范围

是 $0<x<10$.

当 $x=4$ 时，$y=-2\times4^2+20\times4=48$.

这说明当 EF 的长为 4 cm 时，所截得矩形的面积为 48 cm^2.

例 3 某公司自主设计了一款成本为 40 元的儿童玩具，并投放市场进行试销售. 经过调查发现，该产品每天的销售量 n（单位：件）与销售单价 x（单位：元）之间满足 $n=-10x+1\,200(0<x<120)$.

（1）求出每天销售这款儿童玩具获得的利润 y（单位：元）关于销售单价 x（单位：元）的函数表达式（利润＝销售额－成本）；

（2）当销售单价定为多少时，该公司每天获得的利润最大？最大利润是多少？

解 （1）因为

$$\begin{aligned}y&=n(x-40)\\&=(-10x+1\,200)(x-40)\\&=-10x^2+1\,600x-48\,000,\end{aligned}$$

所以利润 y 关于销售单价 x 的函数表达式为 $y=-10x^2+1\,600x-48\,000$.

（2）因为

$$\begin{aligned}y&=-10x^2+1\,600x-48\,000\\&=-10\,(x-80)^2+16\,000,\end{aligned}$$

所以当销售单价定为 80 元时，该公司每天获得的利润最大，最大利润是 16 000 元.

课堂练习 27.5

1. 某照明公司研发了一款成本为 20 元的新型节能灯. 经过试销售后发现，销售单价定为 25 元时，每月销售量为 250 个；每涨价 1 元，每月少销售 10 个.

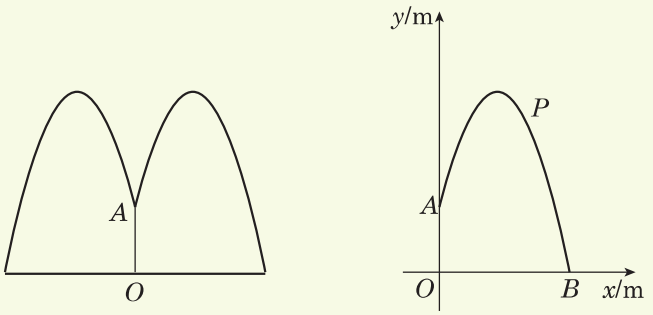
（1）求每月销售这款新型节能灯获得的利润 y（单位：元）关于销售单价 x（单位：元）的函数表达式；

(2) 当销售单价定为多少时，每月销售这款新型节能灯所获得的利润最大?

2. 某公园要建造一个圆形的喷水池，在水池中央竖一根垂直于水面的水管，水管顶端安装一个喷头向外喷水. 如图(1)，OA 表示水管，水流在各个方向上沿抛物线路径落下. 在图(2)所示的平面直角坐标系中，水流 APB 表示落点 B 离点 O 最远的一条水流，其上的水珠高度 y(单位：m)关于水平距离 x(单位：m)的函数表达式为 $y=-x^2+4x+\frac{9}{4}$.

(1) 水流 APB 上的水珠离水面的最大高度是多少?

(2) 如果不考虑其他因素，那么圆形水池的半径至少为多少时，才能使喷出的水流不落到水池外?



(1) (2)

(第 2 题)

习题 27.5

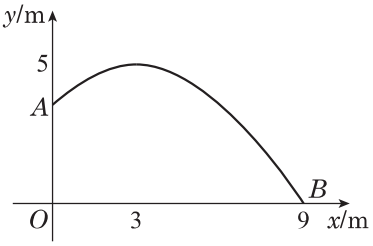
A

1. 如果在距地面高度 h_0 m 处将一个物体以 v_0 m/s 的速度竖直上抛，那么物体距地面高度 h(单位：m)与运动时间 t(单位：s)的关系可以用函数 $h=-4.9t^2+v_0t+h_0$ 表示. 现将一个小球从地面开始以 24.5 m/s 的速度竖直向上抛，它经过多长时间落回地面?

2. 如图，计划利用一段长为 a m 的栅栏和一面长度大于 a m 的墙围成一个矩形活动区域，试确定矩形的两邻边的长，使得活动区域的面积最大.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，要修建一个圆形喷水池，在池中心（点 O）竖直安装一根水管，在水管的顶端 A 处安装一个喷头，使得喷出的抛物线形水柱在与池中心水平距离 3 m 处达到最高，高度为 5 m，水柱落地处（点 B）到池中心的距离为 9 m. 以 OB 为 x 轴、OA 为 y 轴，建立如图所示的平面直角坐标系.

（1）求该抛物线的表达式；

（2）求水管 OA 的长度.

B

4. 北京冬奥会推出的吉祥物“冰墩墩”“雪容融”深受人们的喜爱，销售火爆. 某经销商以每个 60 元的价格购进了一批“冰墩墩”摆件，打算采取线下和线上两种方式销售. 调查发现，线下每周销售量 y（单位：个）与销售单价 x（单位：元）$(x \geqslant 60)$ 满足一次函数关系，而且当销售单价为 105 元时，每周销售量为 150 个；当销售单价为 115 元时，每周销售量为 50 个. 线上销售单价为 100 元.

（1）求 y 关于 x 的函数表达式；

（2）该经销商共购进 1 000 个“冰墩墩”，一周内可以全部销售完. 如何分配线下和线上的销量，可使全部售完后获得的利润最大？最大利润是多少？

◎内容提要

1. 基本概念：二次函数.

2. 二次函数 $y=a(x+m)^2+h$（a、m、h 是常数，且 $a\neq0$）的图像与性质：

二次项系数 a	$a>0$	$a<0$
对称轴	直线 $x=-m$	直线 $x=-m$
顶点坐标	$(-m,h)$	$(-m,h)$
开口方向与大小	抛物线开口向上，无限延伸，a 越大，开口越小	抛物线开口向下，无限延伸，$\lvert a\rvert$越大，开口越小
图像的变化规律	在对称轴左侧，图像下降；在对称轴右侧，图像上升；顶点是抛物线的最低点	在对称轴左侧，图像上升；在对称轴右侧，图像下降；顶点是抛物线的最高点
函数值的变化规律	当 $x<-m$ 时，函数值 y 随着自变量 x 的增大而减小；当 $x>-m$ 时，函数值 y 随着自变量 x 的增大而增大	当 $x<-m$ 时，函数值 y 随着自变量 x 的增大而增大；当 $x>-m$ 时，函数值 y 随着自变量 x 的增大而减小
函数的最值	当 $x=-m$ 时，函数值 y 取到最小值，最小值为 h	当 $x=-m$ 时，函数值 y 取到最大值，最大值为 h

3. 二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$的图像与性质：

通过配方，$y=ax^2+bx+c$ 可化为 $y=a(x+m)^2+h$ 的形式，其中 $m=\dfrac{b}{2a}$，$h=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$. 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像是抛物线，其对称轴是直线 $x=-\dfrac{b}{2a}$，顶点坐标是$\left(-\dfrac{b}{2a},\ \dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$，其他性质参考上表.

4. 二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$与一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$的联系：

（1）如果二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像与 x 轴有交点，那么该抛物线

与 x 轴交点的横坐标就是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的实数根.

(2) 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴交点的个数与一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的判别式之间的关系为:

抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴交点的个数	2 个	1 个	0 个
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的判别式 $\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$

◎复习题

A

1. 填空题：

（1）二次函数 $y=2(x+1)^2-3$ 的图像开口向_____，对称轴是_____，顶点坐标是_____；该二次函数在 $x=$_____时，取到最_____值_____.

（2）将抛物线 $y=-\frac{1}{3}x^2$ 先向右平移 2 个单位长度，再向下平移 1 个单位长度后得到的抛物线表达式是_____.

2. 用长为 24 m 的篱笆围成一个矩形花圃，设其一条边长为 x m，面积为 y m^2. 求 y 关于 x 的函数表达式，写出自变量 x 的取值范围，并求出面积的最大值以及取得最大值时 x 的值.

3. 已知二次函数 $y=ax^2$ 的图像经过点 $A(-2,4)$.

（1）求这个二次函数的表达式；

（2）写出该二次函数的图像上纵坐标为 4 的另一个点 B 的坐标，并求出 $\triangle AOB$ 的面积；

（3）写出自变量 x 在什么范围时，函数值 y 随着自变量 x 的增大而减小.

4. 已知二次函数 $y=-2x^2+bx+c$ 的图像经过点 $A(0,1)$、$B(1,-5)$.

（1）求此二次函数的表达式；

（2）将表达式化成 $y=a(x+m)^2+h$ 的形式，写出其图像的顶点坐标和对称轴，并说明 y 随 x 的变化规律.

5. 已知抛物线 $y=2x^2-4x-6$.

（1）求其对称轴和顶点坐标，并指出它的变化规律；

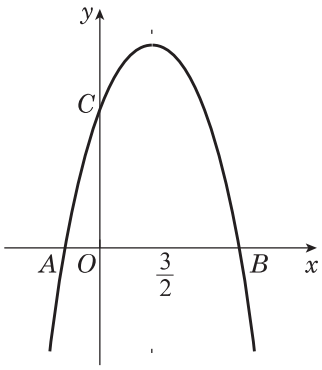
（2）指出该抛物线如何由抛物线 $y=2x^2$ 平移得到.

6. 已知一个二次函数图像的对称轴是直线 $x=-1$，在 x 轴上截得的线段长为 4，与 y 轴交点的坐标为$(0,-6)$. 求这个二次函数的表达式.

B

7. 讨论二次函数 $y=(1-k)x^2+(k-1)x+3$ 图像的开口方向、对称轴、顶点. 判断此二次函数有最大值还是最小值，并求出自变量 x 的相应取值.

8. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像与 x 轴交于点 $A(-1,0)$和点 B，对称轴是直线 $x=\frac{3}{2}$.



(第 8 题)

(1) 求点 B 的坐标；

(2) 如果这个函数的图像还经过点 $C(0,4)$，如图所示，求这个函数的表达式；

(3) 写出由(2)所得的函数图像的顶点坐标及 y 随 x 的变化规律.

9. 已知二次函数 $y=-\frac{1}{2}x^2+(3-\sqrt{m})x+m-1$ 图像的顶点在 y 轴正半轴上.

(1) 求该二次函数的表达式；

(2) 判断此二次函数有最大值还是最小值，并求出自变量 x 的相应取值.

10. 当实数 k 分别满足什么条件时，抛物线 $y=(k-1)x^2+(2k-1)x+(k-2)$与 x 轴交点个数的情况如下：

(1) 没有交点？

(2) 有且只有一个交点？

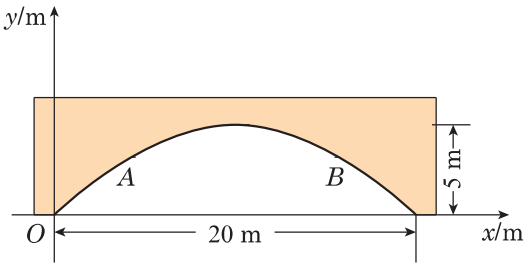
(3) 两个交点？

11. 已知一条抛物线与 x 轴交于$A(-3,0)$、$B(1,0)$两点，与 y 轴的负半轴交于点 P. 若$\triangle ABP$ 的面积为 6，求该抛物线的表达式.

12. 有一座抛物线形拱桥，已知水位正常时，桥下水面宽度为 20 m，拱顶距水面 5 m. 拱桥的截面图如图所示，其中桥拱截线是一段抛物线，平面直角坐标系的原点 O 是桥拱截线与正常水位的水面截线相交处的一点，x 轴在水面截线上；AB 是警戒线，拱顶到 AB 的距离是 1.8 m.

（1）求桥拱截线所在抛物线的表达式；

（2）求水位达到警戒线 AB 位置时水面的宽度.



（第 12 题）



第28章

相似三角形

在“三角形”这一章，我们学习了全等形，知道两个全等图形的形状和大小都相同. 在现实世界中，还有许多形状相同而大小各异的几何图形，这类图形称为相似形.

在本章中，我们将学习图形的相似，并重点学习相似三角形的判定与性质.

相似三角形是表达几何图形的变化，研究图形间定量关系的重要工具，也是后续三角以及高中阶段有关一般角的正弦、余弦、正切等知识的基础.

28.1 成比例的线段

1. 成比例的线段

由于图形的相似与线段长度的比有密切的关联，因此，为研究相似性，需要先研究成比例的线段.

我们已经知道，两个数或两个量 a 与 b（$b\neq0$）相除，叫作 a 与 b 的比，记作 $a:b$（或表示为 $\frac{a}{b}$），a 与 b 的商叫作比值. 如果 $a:b$ 的值等于 k，那么 $a=bk$.

两条线段的长度的比叫作**两条线段的比**.

求两条线段的比时，对这两条线段一定要用同一长度单位来度量. 因为线段的长度是正数，所以两条线段的比值总是正数.

对于四条线段 a、b、c、d，如果 $a:b=c:d$（或表示为 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$），就说 a、b、c、d **成比例**.

如果三条线段 a、b、c 满足 $a:b=b:c$，那么线段 b 叫作线段 a、c 的**比例中项**.

一般地，比例有以下性质(假设式中出现的分母均不为零)：

(1) 如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那么 $ad=bc$；

(2) 如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那么 $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$；

(3) 如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那么 $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$；

(4) 如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$，那么 $\frac{a+c}{b+d}=k$.

上面的性质(1)～(3)是显然的. 性质(4)可证明如下：由已知 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$

得到$a=bk$，$c=dk$，从而$\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{bk+dk}{b+d}=k$.

性质(4)可以推广到多个比相等的情形，请自行尝试.

例 1 如图 28-1-1，已知：$\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$.

求证：(1) $\dfrac{AB}{DB}=\dfrac{AC}{EC}$；(2) $\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AC}{AE}$.

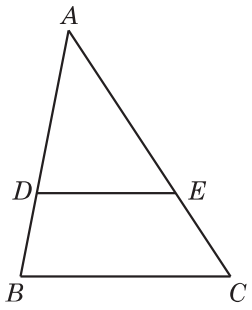


图 28-1-1

证明 (1) $\because$ $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$，

$\therefore$ $\dfrac{AD+DB}{DB}=\dfrac{AE+EC}{EC}$.

$\therefore$ $\dfrac{AB}{DB}=\dfrac{AC}{EC}$.

(2) $\because$ $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$，

$\therefore$ $\dfrac{DB}{AD}=\dfrac{EC}{AE}$.

$\therefore$ $\dfrac{DB+AD}{AD}=\dfrac{EC+AE}{AE}$.

$\therefore$ $\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AC}{AE}$.

问题 已知线段 AB，在线段 AB 上是否存在一点 P，使得 $\dfrac{AP}{AB}=\dfrac{PB}{AP}$?

如图28-1-2，设 $AB=l$，$AP=x$，那么 $PB=l-x$.

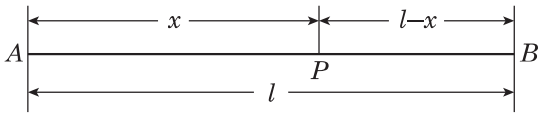


图 28-1-2

由 $\dfrac{AP}{AB}=\dfrac{PB}{AP}$，得到关于 x 的方程

$$\frac{x}{l}=\frac{l-x}{x},$$

即 $$x^2+lx-l^2=0.$$

此方程的解为

$$x=\frac{-l\pm\sqrt{5l^2}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}l.$$

因为 x 必须是正的，所以

$$x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}l,$$

即 $\dfrac{AP}{AB}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

至此，我们通过计算说明了满足要求的点 P 是存在的.

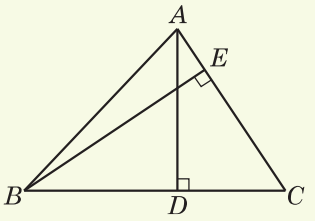
上面的点 P 将线段 AB 分割成两段，其中较长一段(AP)为较短一段(BP)和线段 AB 的比例中项，这样的分割叫作**黄金分割**，点 P 叫作线段 AB 的**黄金分割点**. 分割得到的较长线段与整条线段的比值 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 叫作**黄金数**，它是一个无理数，近似值通常取为 0.618.

黄金分割在生活中有很多应用，可参阅后面的阅读材料.

课堂练习 28.1(1)

1. 已知线段 $a=4$ cm，$c=9$ cm. 求线段 a 和 c 的比例中项 b.

2. 如图，已知：AD、BE 是$\triangle ABC$ 的两条高. 求证：$\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{BE}{AD}$.



(第 2 题)

3. 如果线段 MN 的长为 2 cm，点 P 是线段 MN 的黄金分割点，那么较长线段 MP 的长是_____cm，较短线段 PN 的长是_____cm.

2. 平行线分线段成比例

我们知道三角形的中位线平行于三角形的第三边. 如图 28-1-3，DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线，这时 $DE /\!/ BC$. 反过来，如果 $AD=DB$，$DE /\!/ BC$，那么是否有 $AE=EC$ 呢?

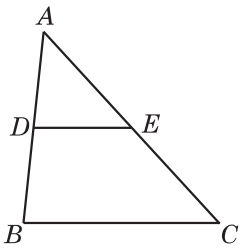


图 28-1-3

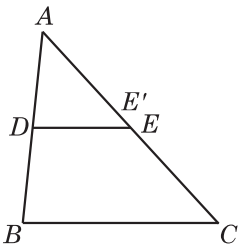


图 28-1-4

如图 28-1-4，取线段 AC 的中点 E'，连接 DE'.

$\because$ D 是 AB 的中点，E' 是 AC 的中点，

$\therefore$ $DE' /\!/ BC$.

$\because$ $DE /\!/ BC$，

$\therefore$ DE 与 DE' 重合.

进而得到点 E 与点 E' 重合，即 E 为 AC 的中点，所以 $AE=EC$.

上述结论也可以叙述为：若 $\dfrac{AD}{DB}=1$，且 $DE /\!/ BC$，则 $\dfrac{AE}{EC}=\dfrac{AD}{DB}=1$.

如果 $DE /\!/ BC$ 仍成立，但 $\dfrac{AD}{DB}$ 不一定等于 1，那么 $\dfrac{AE}{EC}=\dfrac{AD}{DB}$ 还成立吗?

对此问题，有如下结论：

平行线分线段成比例定理 1 平行于三角形一边的直线截其他两边所在的直线，截得的对应线段成比例.

如图 28-1-5，已知：在 $\triangle ABC$ 中，D、E 分别是边 AB、AC 上的点，且 $DE /\!/ BC$.

求证：$\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$.

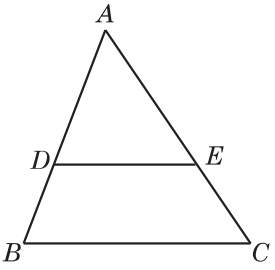


图 28-1-5

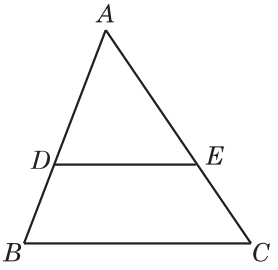


图 28-1-6

根据比例的性质，$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ 也可以写成 $\frac{EC}{DB}=\frac{AE}{AD}$. 在表述成比例的线段时，只要符合比例的性质，写其中任何一个均可.

证明 如图 28-1-6，分别连接 BE、DC. 设点 E 到 AB 的距离为 h，则

$$S_{\triangle EAD}=\frac{1}{2}AD\cdot h,\ S_{\triangle EBD}=\frac{1}{2}DB\cdot h.$$

由此得 $$\frac{S_{\triangle EAD}}{S_{\triangle EBD}}=\frac{AD}{DB}.$$

同理可得 $$\frac{S_{\triangle EAD}}{S_{\triangle ECD}}=\frac{AE}{EC}.$$

因为 $DE/\!/BC$，由同底等高的两个三角形面积相等，得 $S_{\triangle EBD}=S_{\triangle ECD}$，即 $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$.

上面我们讨论了截线与三角形两边相交的情形. 当截线与三角形两边的延长线相交时，结论依然成立. 如图 28-1-7，在△ABC 中，当点 D 在边 BA 的延长线上，点 E 在边 CA 的延长线上，且 $DE/\!/BC$ 时，请自行证明 $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$.

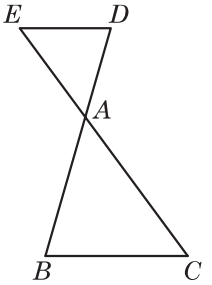


图 28-1-7

例 2 如图 28-1-8，在△ABC 中，$DE/\!/BC$，$AB=15$，$AC=10$，$BD=6$. 求 CE 的长.

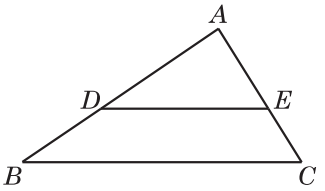


图 28-1-8

解 ∵ $DE/\!/BC$，

∴ $\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{CE}$.

由 $AB=15$，$AC=10$，$BD=6$，得

$$\frac{15}{6}=\frac{10}{CE}.$$

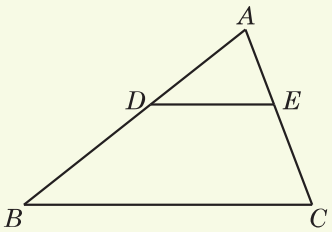
所以，$CE=4$.

课堂练习 28.1(2)

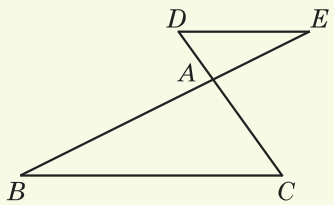
1. 如图，在$\triangle ABC$ 中，$DE/\!/BC$，DE 与边 AB 相交于点 D，与边 AC 相交于点 E.

（1）若 $AD=6$，$BD=8$，$AE=4$，求 CE 的长；

（2）若 $AE:AC=2:5$，$AB=10$，求 AD 的长.



（第 1 题）



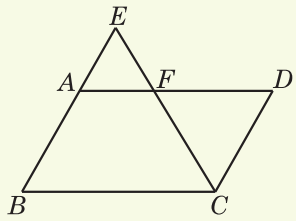
（第 2 题）

2. 如图，点 D、E 分别在$\triangle ABC$ 的边 CA、BA 的延长线上，且 $DE/\!/BC$.

（1）若 $AB=18$，$AD=5$，$AE=9$，求 AC 的长；

（2）若 $AB=18$，$CD=15$，$AE=9$，求 AC 的长.

3. 如图，已知：在平行四边形 $ABCD$ 中，F 是边 AD 上一点，延长 CF 交边 BA 的延长线于点 E. 求证：$\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AF}{FD}$.



（第 3 题）

思考

如果将平行线分线段成比例定理 1 中的平行线再增加一条，我们是否依然可以得到对应线段成比例的结论呢？

平行线分线段成比例定理 2　两条直线被三条平行线所截，截得的对应线段成比例.

如图 28-1-9，已知：三条互相平行的直线 l_1、l_2、l_3 与直线 BD、CE 分别相交于点 D、E、F、G、B、C.

求证：$\dfrac{DF}{FB}=\dfrac{EG}{GC}$.

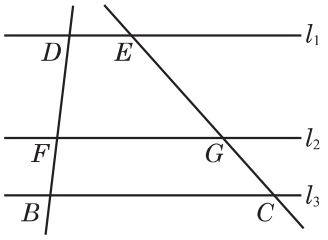


图 28-1-9

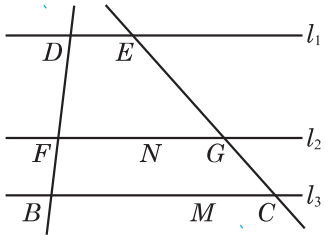


图 28-1-10

证明　如果 $BD/\!/EC$，利用平行四边形的性质即可得 $\dfrac{DF}{FB}=\dfrac{EG}{GC}$.

如果直线 DB 与直线 EC 不平行，过点 D 作 $DM/\!/EC$ 分别交直线 FG、BC 于点 N、M，如图 28-1-10 所示.

因为 $DE/\!/FG$，$DM/\!/EC$，所以四边形 $DEGN$ 为平行四边形，从而 $EG=DN$.

同理 $NM=GC$.

由 $l_2/\!/l_3$，得 $\dfrac{DF}{FB}=\dfrac{DN}{NM}=\dfrac{EG}{GC}$.

对于图 28-1-11 的情形可以类似处理.

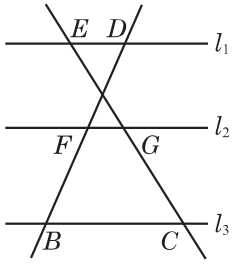


图 28-1-11

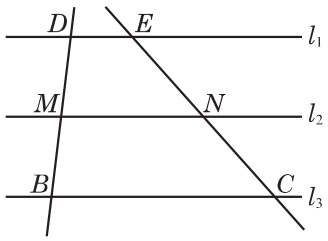


图 28-1-12

如图 28-1-12，当直线 l_2 过线段 DB 的中点 M，即 $DM=MB$ 时，有 $EN=NC$. 也就是说：

两条直线被三条平行的直线所截，如果在一条直线上截得的线段相等，那么在另一条直线上截得的线段也相等.

例 3 如图 28-1-13，已知 $l_1 // l_2 // l_3$，$AB=3$，$AC=8$，$DF=10$. 求 DE、EF 的长.

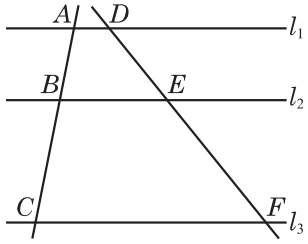


图 28-1-13

解 ∵ $l_1 // l_2 // l_3$，

∴ $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{DE}{DF}$.

又∵ $AB=3$，$AC=8$，$DF=10$，

∴ $\dfrac{3}{8}=\dfrac{DE}{10}$.

∴ $DE=\dfrac{15}{4}$，$EF=DF-DE=\dfrac{25}{4}$.

例 4 如图 28-1-14，已知线段 a、b、c. 求作线段 x，使 $a:b=c:x$.

作法 （1）作以 O 为端点的射线 OM 和 ON；

（2）在 OM 上顺次截取 $OA=a$，$AB=b$；

（3）在 ON 上截取 $OC=c$；

作图的依据是平行线分线段成比例定理.

（4）连接 AC，过点 B 作直线 AC 的平行线 BD，直线 BD 交 ON 于点 D. 线段 CD 就是所求的线段 x（图 28-1-15）.

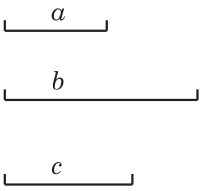


图 28-1-14

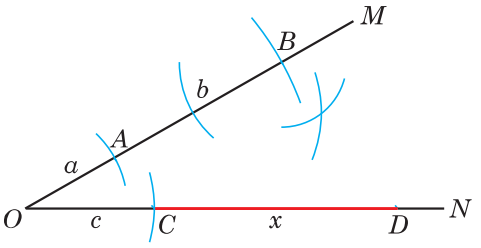


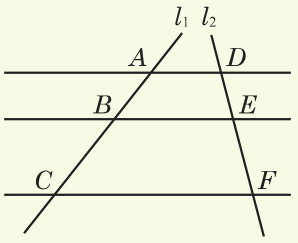
图 28-1-15

课堂练习 28.1(3)

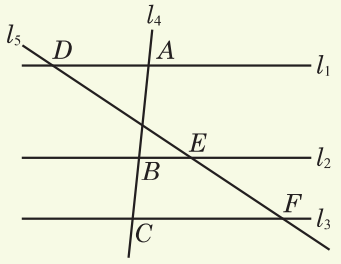
1. 如图，已知 $AD \parallel BE \parallel CF$，它们依次交直线 l_1、l_2 于点 A、B、C 和点 D、E、F.

（1）如果 $AB=6$，$BC=10$，$EF=8$，求 DE 的长；

（2）如果 $DE:EF=3:5$，$AC=24$，求 AB、BC 的长.



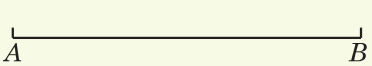
（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，直线 l_1、l_2、l_3 分别交直线 l_4 于点 A、B、C，交直线 l_5 于点 D、E、F，且 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$. 已知 $AB=3$，$AC=5$，$DF=9$. 求 DE、EF 的长.

3. 如图，已知线段 AB，在线段 AB 上求作一点 C，使 $AC:CB=2:3$.



（第 3 题）

习题 28.1

A

1. A、B 两地的实际距离 $AB=250$ m，画在地图上的距离 $A'B'=5$ cm. 求地图上的距离与实际距离的比值.

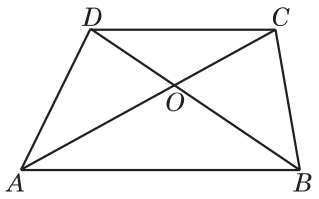
2. 已知线段 a、b、c、d 成比例，且 $a=12$ cm，$b=3$ cm，$c=4$ cm. 求线段 d 的长.

3. 已知 $\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{18}{5}$，求 $\dfrac{a-b}{b}$ 的值.

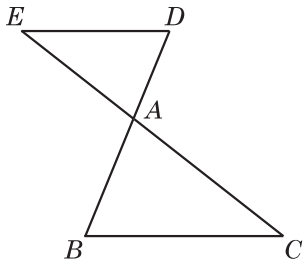
4. 如图，已知梯形 $ABCD$ 中，$AB\parallel DC$，$\triangle AOB$ 的面积等于 9，$\triangle AOD$ 的面积等于 6.

（1）求 $\triangle BOC$ 的面积；

（2）求 $\dfrac{DO}{OB}$ 和 $\dfrac{CO}{OA}$ 的值.



（第 4 题）

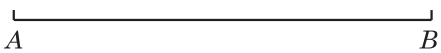


（第 5 题）

5. 如图，已知 BD 与 CE 相交于点 A，$DE\parallel BC$，$AB=8$，$AC=12$，$AD=6$. 求 AE 的长.

B

6. 给定线段 AB，请通过尺规作图作出线段 AB 的三等分点.



（第 6 题）

28.2 相似三角形

观察下面两组图片：图 28-2-1 中是两颗五角星，这两颗五角星一颗大一颗小，但形状相同；图 28-2-2 中是两个圆，它们也是大小不同但形状相同.



图 28-2-1

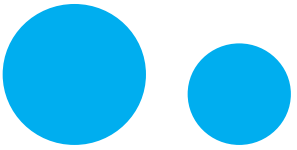


图 28-2-2

日常生活中，可以看到许多像这样形状相同、大小不一定相同的图形. 本节中我们先讨论最简单的图形——三角形.

定义 如果两个三角形的三个角对应相等，三条边对应成比例，那么称这**两个三角形相似**.

两个三角形相似也可以表述为“两个三角形是相似三角形”或“一个三角形与另一个三角形相似”.

如图 28-2-3，已知 DE 是$\triangle ABC$ 的中位线，那么在$\triangle ADE$ 与$\triangle ABC$ 中，

$$\angle A=\angle A，\angle ADE=\angle B，\angle AED=\angle C；$$

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}=\frac{1}{2}.$$

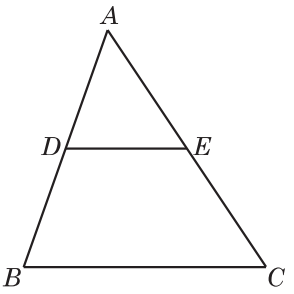


图 28-2-3

由定义知，这两个三角形相似. 这时可用符号表示为$\triangle ADE\backsim\triangle ABC$，其中点 A 与点 A、点 D 与点 B、点 E 与点 C 分别对应；符号“$\backsim$”读作“相似于”.

当我们说$\triangle ABC$ 与$\triangle A_1B_1C_1$ 相似时，常意味着点 A、B、C 分别是点 A_1、B_1、C_1 的对应顶点.

两个相似三角形的对应边的比值叫作这两个相似三角形的**相似比**.

图 28-2-3 中，$\frac{AD}{AB}=\frac{1}{2}$，因此$\triangle ADE$ 与$\triangle ABC$ 的相似比 $k=\frac{AD}{AB}=\frac{1}{2}$，

而$\triangle ABC$与$\triangle ADE$的相似比$k'=\dfrac{AB}{AD}=2$.

设$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$的相似比为k，则$\triangle A'B'C'$与$\triangle ABC$的相似比为$\dfrac{1}{k}$.

当两个相似三角形的相似比等于1时，这两个相似三角形就成为**全等三角形**. 反过来，两个全等三角形一定是相似比等于1的相似三角形. 显然，全等三角形是相似三角形的特殊情形.

如果$\triangle A_1B_1C_1\backsim\triangle ABC$，$\triangle A_2B_2C_2\backsim\triangle ABC$，那么$\triangle A_1B_1C_1$与$\triangle A_2B_2C_2$相似吗？为什么？

由相似三角形的对应角相等、对应边成比例，可以推出：

如果两个三角形都与第三个三角形相似，那么这两个三角形相似.

这个性质称为三角形相似的传递性.

根据定义，要得到两个三角形相似，必须有三个角对应相等，三条边对应成比例. 在上一节平行线分线段成比例定理1中，我们已经知道被平行线截出的三角形与原三角形三个角对应相等，两组对边对应成比例. 如果第三组对边的比值也和另两组对边的比值相等，就可以得到两个三角形相似. 由此可得：

定理 平行于三角形一边的直线截其他两边所在的直线，截得的三角形与原三角形相似.

这个定理常被称为相似三角形的预备定理.

这里我们仅就点D、E在边AB、AC上的情形加以证明.

如图28-2-4，已知：点D、E分别在$\triangle ABC$的边AB、AC上，$DE/\!/BC$.

求证：$\triangle ABC\backsim\triangle ADE$.

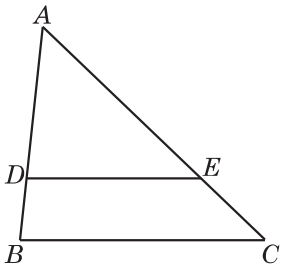


图 28-2-4

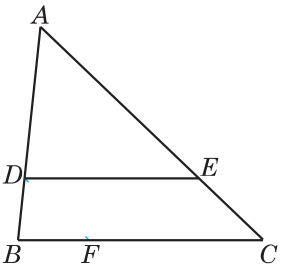


图 28-2-5

证明 过点 D 作 $DF\parallel AC$，交边 BC 于点 F，如图 28-2-5 所示.

由 $DE\parallel BC$，$DF\parallel AC$，得四边形 $DFCE$ 为平行四边形，由此得 $FC=DE$，即 $\dfrac{BC}{FC}=\dfrac{BC}{DE}$.

根据平行线分线段成比例定理，由 $DF\parallel AC$，得 $\dfrac{BC}{FC}=\dfrac{AB}{AD}$，由 $DE\parallel BC$，得 $\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AC}{AE}$，从而有 $\dfrac{BC}{DE}=\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AC}{AE}$.

再由 $DE\parallel BC$，得 $\angle B=\angle ADE$，$\angle C=\angle AED$，又 $\angle A$ 为公共角，所以根据相似三角形的定义，有 $\triangle ABC\backsim\triangle ADE$.

根据相似三角形的定义来判定两个三角形相似，需要验证它们的三个角对应相等，同时它们的三条边对应成比例. 类似于判定两个三角形全等的条件，我们也可以用较少的条件来判定两个三角形相似.

在判定三角形全等时，如果两个三角形中有两个角对应相等，并且所夹的边对应相等(或其中一组对应角的对边相等)，那么这两个三角形全等. 在考虑相似时，不再需要边对应相等，所以可以先考虑当两个三角形中有两个角对应相等时，这两个三角形是否相似. 我们有

定理 两角对应相等的两个三角形相似.

如图 28-2-6，已知：在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 中，$\angle A=\angle A_1$，$\angle B=\angle B_1$.

求证：$\triangle ABC\backsim\triangle A_1B_1C_1$.

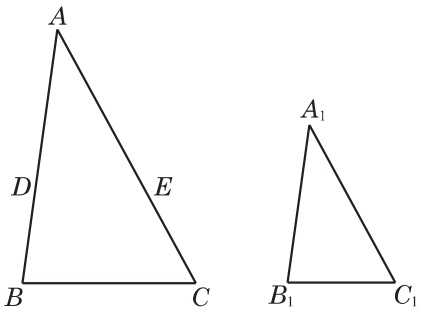


图 28-2-6

证明　这里不妨假设 $AB>A_1B_1$. 在 AB 上截取 $AD=A_1B_1$，再过点 D 作 $DE/\!/BC$，交 AC 于点 E，如图 28-2-6 所示.

因为 $DE/\!/BC$，所以 $\angle ADE=\angle B$，结合 $\angle B=\angle B_1$，得 $\angle ADE=\angle B_1$.

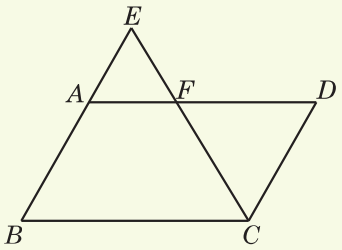
又由 $\angle A=\angle A_1$ 及 $AD=A_1B_1$，得 $\triangle ADE\cong\triangle A_1B_1C_1$.

又因为 $DE/\!/BC$，由相似三角形的预备定理，得 $\triangle ADE\backsim\triangle ABC$.

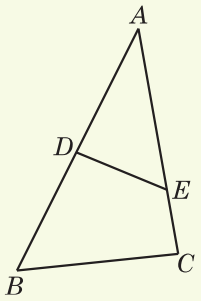
所以 $\triangle ABC\backsim\triangle A_1B_1C_1$.

课堂练习 28.2(1)

1. 如图，E 是平行四边形 $ABCD$ 的边 BA 延长线上的一点，CE 交 AD 于点 F. 图中有哪几对相似三角形?



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，已知：D、E 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AB、AC 上的点，且 $\angle AED=\angle B$. 求证：$AE\cdot AC=AD\cdot AB$.

在判定三角形全等时，如果两边及其夹角对应相等，那么两个三角形全等. 类似地，如果两个三角形两边对应成比例且夹角相等，这两个三角形是否相似呢？我们有

定理 两边对应成比例且夹角相等的两个三角形相似.

如图 28-2-7，已知：在$\triangle ABC$和$\triangle A_1B_1C_1$中，$\angle A=\angle A_1$，$\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{AC}{A_1C_1}$.

求证：$\triangle ABC\backsim\triangle A_1B_1C_1$.

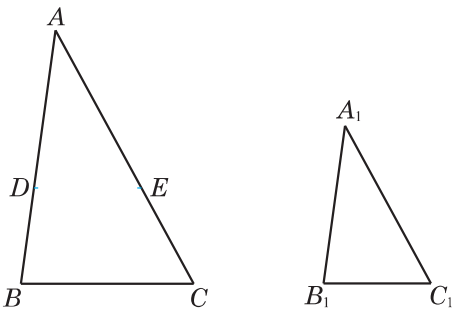


图 28-2-7

分析 同“两角对应相等的两个三角形相似”的证明类似. 在 AB 上截取 $AD=A_1B_1$，并过点 D 作 $DE/\!/BC$，DE 交 AC 于点 E. 由相似三角形的预备定理，可得$\triangle ADE\backsim\triangle ABC$.

请根据此分析，自行证明.

例 1 如图 28-2-8，已知：四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O，$OA=1$，$OB=1.5$，$OC=3$，$OD=2$.

求证：$\triangle OAD$ 与$\triangle OBC$ 是相似三角形.

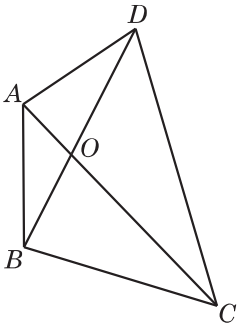


图 28-2-8

证明 ∵ $OA=1$，$OB=1.5$，$OC=3$，$OD=2$，

∴ $\dfrac{OA}{OB}=\dfrac{1}{1.5}=\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{OD}{OC}=\dfrac{2}{3}$.

由此得 $\dfrac{OA}{OB}=\dfrac{OD}{OC}$.

在△OAD 与△OBC 中，

∵ $\begin{cases} \dfrac{OA}{OB}=\dfrac{OD}{OC}, \\ \angle AOD=\angle BOC, \end{cases}$

∴ △OAD∽△OBC.

图 28-2-8 中还有其他的相似三角形吗？如果有，请用符号将它们表示出来.

同样地，由三边对应相等的两个三角形全等，可以考虑三边对应成比例的两个三角形是否相似.

类似于前面几个判定定理的证明，我们可以得到：

定理 三边对应成比例的两个三角形相似.

例 2 如图 28-2-9，已知：D、E、F 分别是△ABC 的边 BC、CA、AB 的中点.

求证：△DEF∽△ABC.

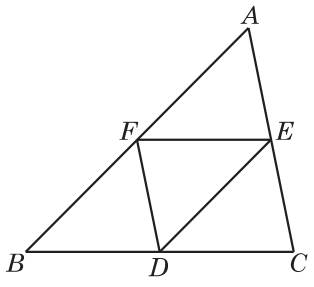


图 28-2-9

分析 DE、EF、FD 是△ABC 的中位线，利用中位线的性质，可得△DEF 与△ABC 的三边对应成比例.

证明 ∵ D、E 分别是△ABC 的边 BC、CA 的中点，

∴ DE 是△ABC 的中位线，

∴ $DE=\dfrac{1}{2}AB$，即 $\dfrac{DE}{AB}=\dfrac{1}{2}$.

同理可得 $\dfrac{EF}{BC}=\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{FD}{CA}=\dfrac{1}{2}$.

在△DEF 与△ABC 中，

∵ $\dfrac{DE}{AB}=\dfrac{EF}{BC}=\dfrac{FD}{CA}$,

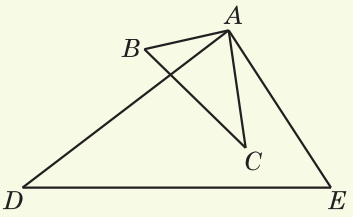
∴ △DEF∽△ABC.

思考

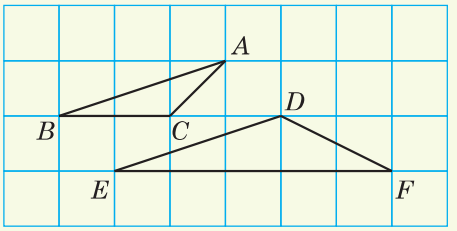
例 2 是否还有其他证法?

课堂练习 28.2(2)

1. 如图，已知：在$\triangle ABC$与$\triangle AED$中，$\frac{AB}{AE}=\frac{AC}{AD}$，$\angle BAD=\angle CAE$. 求证：$\triangle ABC\backsim\triangle AED$.



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 如图，每个小方格的边长为 1 个单位长度，$\triangle ABC$和$\triangle DEF$的顶点都在格点位置. 试判断这两个三角形是否相似，并说明理由.

例 3 如图 28-2-10，已知：点 D、E 分别在线段 AB 和 AC 上，$AD\cdot AB=AE\cdot AC$，F 是 BE 与 CD 的交点.

求证：$\angle FDB=\angle FEC$.

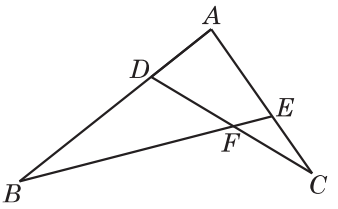


图 28-2-10

证明 ∵ $AD\cdot AB=AE\cdot AC$，

∴ $\frac{AB}{AC}=\frac{AE}{AD}$.

又∵ $\angle A$ 为公共角，

∴ $\triangle ABE\backsim\triangle ACD$.

∴ $\angle B=\angle C$.

又∵ $\angle DFB=\angle EFC$，

∴ $\angle FDB=\angle FEC$.

例 4 如图 28-2-11，已知：在$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，CD 是边 AB 上的高.

求证：$CD^2=AD\cdot BD$.

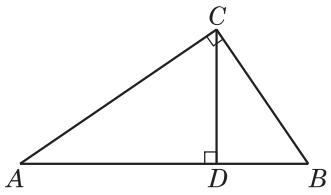


图 28-2-11

分析 将等式 $CD^2=AD\cdot BD$ 写成比例的形式，即为 $\dfrac{CD}{BD}=\dfrac{AD}{CD}$. 为此，考虑证明$\triangle ACD\backsim\triangle CBD$.

证明 $\because$ $\angle ACB=90^\circ$，CD 是$\triangle ABC$ 的边 AB 上的高，

$\therefore$ $\angle ADC=\angle ACB=\angle CDB=90^\circ$.

$\because$ $\angle A+\angle ACD=\angle ACD+\angle BCD=90^\circ$，

$\therefore$ $\angle A=\angle BCD$.

在$\triangle ACD$ 与$\triangle CBD$ 中，

$\because$ $\begin{cases}\angle A=\angle BCD,\\ \angle ADC=\angle CDB,\end{cases}$

$\therefore$ $\triangle ACD\backsim\triangle CBD$.

$\therefore$ $\dfrac{CD}{BD}=\dfrac{AD}{CD}$.

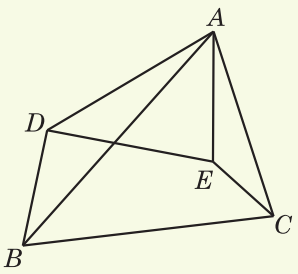
$\therefore$ $CD^2=AD\cdot BD$.

思考

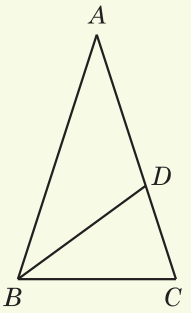
在例 4 中，尝试证明 $AC^2=AD\cdot AB$ 及 $BC^2=BD\cdot AB$，并由此推出勾股定理.

课堂练习 28.2(3)

1. 如图，已知：$\dfrac{DE}{BC}=\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}$. 求证：$\angle DBA=\angle ECA$.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，已知：在$\triangle ABC$ 中，$AB=AC=1$，$\angle A=36^\circ$，BD 平分 $\angle ABC$ 交 AC 于点 D.

（1）求证：$\triangle ABC\backsim\triangle BDC$；

（2）求 BC 的长.

前面通过与全等三角形的判定公理相比较，得到了三角形相似的三个判定定理. 我们知道，如果两个三角形的两条边对应相等，并且其中一组对应边的对角对应相等，那么这两个三角形不一定全等. 然而，如果两个直角三角形的斜边和一条直角边对应相等，那么这两个三角形全等. 类似地，除了已有的三角形相似的判定定理外，我们还有如下的直角三角形相似的判定定理：

定理 斜边和一条直角边对应成比例的两个直角三角形相似.

如图 28-2-12，已知：在 Rt$\triangle ABC$ 和 Rt$\triangle A_1B_1C_1$ 中，$\angle C=\angle C_1=90^\circ$，$\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{BC}{B_1C_1}$.

求证：$\triangle ABC\backsim\triangle A_1B_1C_1$.

证明 设$\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{BC}{B_1C_1}=k$，则 $AB=kA_1B_1$，$BC=kB_1C_1$. 因为$\angle C=\angle C_1=$

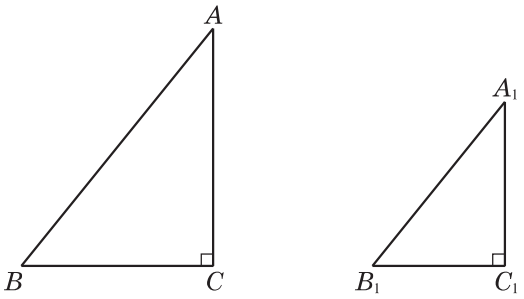


图 28-2-12

90°，由勾股定理得

$$CA^2=AB^2-BC^2,\ C_1A_1^2=A_1B_1^2-B_1C_1^2.$$

所以

$$CA^2=k^2(A_1B_1^2-B_1C_1^2)=k^2C_1A_1^2,$$

从而有 $\dfrac{CA}{C_1A_1}=k$.

于是，$\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{BC}{B_1C_1}=\dfrac{CA}{C_1A_1}$. 由三边对应成比例的两个三角形相似，得 $\triangle ABC\backsim\triangle A_1B_1C_1$.

例 5 如图 28-2-13，已知：在$\triangle ABC$ 与$\triangle A_1B_1C_1$ 中，$AB=AC$，$A_1B_1=A_1C_1$，$BD\perp AC$，$B_1D_1\perp A_1C_1$，垂足分别为 D、D_1，且 $\dfrac{BD}{BC}=\dfrac{B_1D_1}{B_1C_1}$.

求证：$\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{BD}{B_1D_1}$.

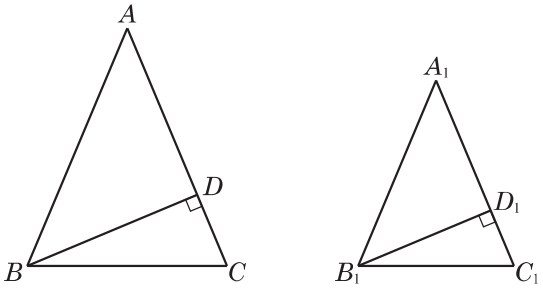


图 28-2-13

证明 在$\triangle BCD$ 和$\triangle B_1C_1D_1$ 中，

∵ $BD\perp AC$，$B_1D_1\perp A_1C_1$，$\dfrac{BD}{BC}=\dfrac{B_1D_1}{B_1C_1}$，

∴ $\mathrm{Rt}\triangle BDC\backsim\mathrm{Rt}\triangle B_1D_1C_1$.

∴ $\angle C=\angle C_1$.

$\because$ $AB=AC$,

$\therefore$ $\angle ABC=\angle C$.

同理，$\angle A_1B_1C_1=\angle C_1$.

$\therefore$ $\angle A=180^\circ-2\angle C=180^\circ-2\angle C_1=\angle A_1$.

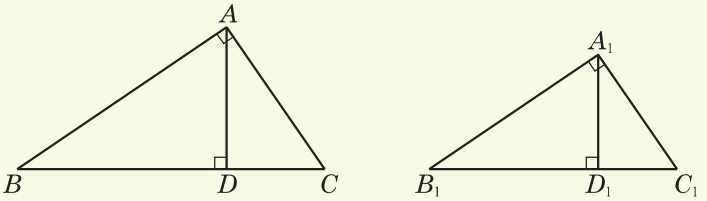
又$\because$ $\angle ADB=\angle A_1D_1B_1=90^\circ$,

$\therefore$ $\triangle ABD\backsim\triangle A_1B_1D_1$.

$\therefore$ $\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{BD}{B_1D_1}$.

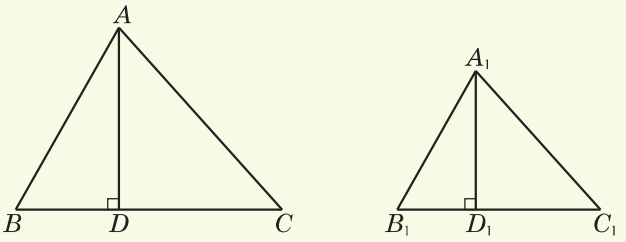
课堂练习 28.2(4)

1. 如图，已知：在 Rt$\triangle ABC$ 与 Rt$\triangle A_1B_1C_1$ 中，$\angle BAC=\angle B_1A_1C_1=90^\circ$，$AD\perp BC$，$A_1D_1\perp B_1C_1$，垂足分别为 D、D_1，且 $\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{AD}{A_1D_1}$. 求证：$\triangle ABC\backsim\triangle A_1B_1C_1$.



（第 1 题）

2. 如图，已知：在$\triangle ABC$ 与$\triangle A_1B_1C_1$ 中，$AD\perp BC$，$A_1D_1\perp B_1C_1$，垂足分别为 D、D_1，且$\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{AD}{A_1D_1}=\dfrac{AC}{A_1C_1}$. 求证：$\triangle ABC\backsim\triangle A_1B_1C_1$.



（第 2 题）

由相似三角形的定义，相似三角形的对应角相等，对应边成比例.

下面，我们来考虑相似三角形中其他对应线段的比值.

例 6 如图 28-2-14，已知：$\triangle ABC\backsim\triangle A_1B_1C_1$，$AD\perp BC$，$A_1D_1\perp B_1C_1$.

求证：$\dfrac{AD}{A_1D_1}=\dfrac{AB}{A_1B_1}$.

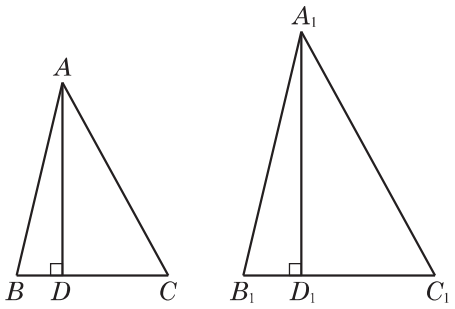


图 28-2-14

证明 ∵ $\triangle ABC\backsim\triangle A_1B_1C_1$，

∴ $\angle B=\angle B_1$.

∵ $AD\perp BC$，$A_1D_1\perp B_1C_1$，

∴ $\angle ADB=\angle A_1D_1B_1=90^\circ$.

∴ $\triangle ABD\backsim\triangle A_1B_1D_1$.

∴ $\dfrac{AD}{A_1D_1}=\dfrac{AB}{A_1B_1}$.

于是，相似三角形对应高的比等于相似比. 用类似的方法可以知道，相似三角形对应的中线之比、对应的角平分线之比也等于相似比. 由相似三角形的定义及比例的性质即得相似三角形的周长之比等于相似比. 这样，我们就得到：

定理 相似三角形对应高的比、对应中线的比、对应角平分线的比以及周长的比都等于相似比.

利用上述性质和三角形的面积公式，可以得到：

定理 相似三角形面积的比等于相似比的平方.

例 7 如图 28-2-15，已知点 D、E 分别在$\triangle ABC$ 的边 AB 和 AC 上，$DE/\!/BC$，$DE=6$，$BC=9$，$\triangle ADE$ 的面积为 16. 求$\triangle ABC$ 的面积.

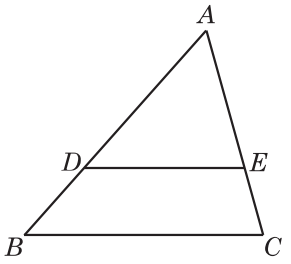


图 28-2-15

解 $\because$ $DE/\!/BC$，

$\therefore$ $\triangle ADE\backsim\triangle ABC$.

$\therefore$ $\dfrac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=\left(\dfrac{DE}{BC}\right)^2$.

由 $DE=6$，$BC=9$，$S_{\triangle ADE}=16$，得 $\dfrac{16}{S_{\triangle ABC}}=\left(\dfrac{6}{9}\right)^2$.

所以 $S_{\triangle ABC}=36$.

课堂练习 28.2(5)

1. 已知两个三角形相似，根据下列数据填表：

相似比	$\frac{1}{2}$	5		
周长的比			$\frac{9}{4}$	
面积的比				$\frac{9}{4}$

2. 已知：D、E、F 分别是$\triangle ABC$ 的边 BC、CA、AB 的中点. 求证：$S_{\triangle ABC}=4S_{\triangle DEF}$.

3. 已知：$\triangle ABC\backsim\triangle A_1B_1C_1$，$BD$、$B_1D_1$ 分别是 $\angle ABC$、$\angle A_1B_1C_1$ 的平分线，且点 D、D_1 分别在边 AC、A_1C_1 上，E、E_1 分别是边 BC、B_1C_1 的中点. 求证：$\dfrac{DE}{D_1E_1}=\dfrac{AB}{A_1B_1}$.

例 8 如图 28-2-16，正方形 $DEFG$ 的边 EF 在 $\triangle ABC$ 的边 BC 上，顶点 D、G 分别在边 AB、AC 上. 已知 $\triangle ABC$ 的边 BC 长为 60 cm，高 AH 为 40 cm. 求正方形 $DEFG$ 的边长.

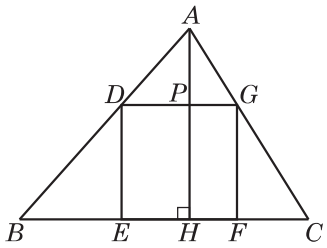


图 28-2-16

解 设 $\triangle ABC$ 的高 AH 与 DG 相交于点 P，正方形 $DEFG$ 的边长为 x cm.

$\because$ 四边形 $DEFG$ 是正方形，

$\therefore$ $DG /\!/ BC$.

$\therefore$ $\triangle ADG \backsim \triangle ABC$.

$\because$ $AH \perp BC$，$DG /\!/ BC$，

$\therefore$ $AP \perp DG$.

$\therefore$ $\dfrac{AP}{AH}=\dfrac{DG}{BC}$.

$\because$ $PH \perp BC$，$GF \perp BC$，

$\therefore$ $PH=GF$，$AP=AH-PH=AH-GF$.

$\therefore$ $\dfrac{AH-GF}{AH}=\dfrac{DG}{BC}$.

由 $BC=60$ cm，$AH=40$ cm，$GF=DG=x$ cm，得 $\dfrac{40-x}{40}=\dfrac{x}{60}$，解得 $x=24$.

所以，正方形 $DEFG$ 的边长是 24 cm.

例 9 如图 28-2-17，已知：在 $\triangle ABC$ 中，AP 平分 $\angle BAC$.

求证：$\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BP}{PC}$.

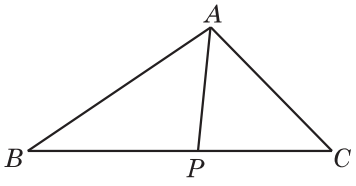


图 28-2-17

证明 过点 B 作 $BE /\!/ AC$，交 AP 的延长线于

点 E，如图 28-2-18 所示.

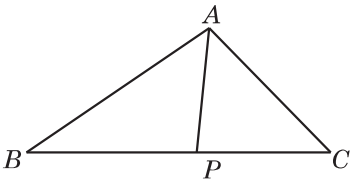


图 28-2-18

$\because$ $BE \parallel AC$，

$\therefore$ $\triangle BPE \backsim \triangle CPA$，$\angle E = \angle PAC$.

$\therefore$ $\dfrac{BE}{AC} = \dfrac{BP}{PC}$.

$\because$ AP 平分 $\angle BAC$，

$\therefore$ $\angle BAP = \angle CAP$.

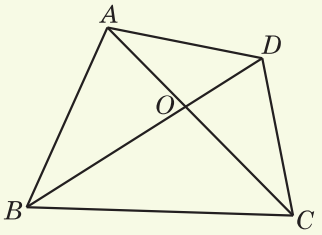
$\therefore$ $\angle E = \angle BAP$.

$\therefore$ $AB = BE$.

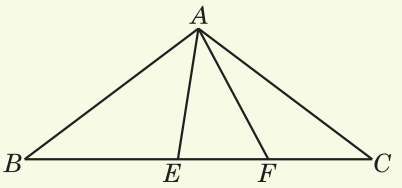
$\therefore$ $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BP}{PC}$.

课堂练习 28.2(6)

1. 如图，已知：在四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC、BD 交于点 O，$\angle BAC = \angle BDC$. 求证：$\angle ADB = \angle ACB$.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，已知：在 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，点 E、F 在边 BC 上，$\angle EAF = \angle B$. 求证：$BF \cdot CE = AB^2$.

28.3 相似多边形

我们已经学习了相似三角形. 类似地，对多边形也有相似的概念.

定义 对两个边数相同的多边形，如果将一个多边形的顶点与另一个多边形的顶点依次对应，使得对应角相等，对应边成比例，那么称这**两个多边形相似**.

两个多边形相似也可以表述为“两个多边形是相似多边形”或“一个多边形与另一个多边形相似”.

如图 28-3-1，如果

$$\angle A=\angle A',\ \angle B=\angle B',\ \angle C=\angle C',\ \angle D=\angle D',$$

且

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DA}{D'A'},$$

那么四边形 $ABCD$ 与四边形 $A'B'C'D'$ 相似. 这时 A'、B'、C'、D' 分别是 A、B、C、D 的对应顶点，$A'B'$、$B'C'$、$C'D'$、$D'A'$ 分别是 AB、BC、CD、DA 的对应边.

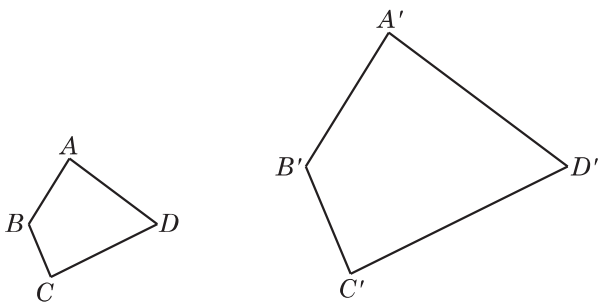


图 28-3-1

两个相似多边形的对应边的比值叫作这两个多边形的**相似比**.

当两个相似多边形是全等形时，它们的相似比等于 1；反过来，当两个相似多边形的相似比等于 1 时，这两个多边形是全等形.

相似三角形是相似多边形的特殊情形.

例 1 如图 28-3-2，四边形 $ABCD$ 与四边形 $A'B'C'D'$ 相似，点 A 与点 A'、点 B 与点 B'、点 C 与点 C'、点 D 与点 D' 分别是对应顶点. 已知 $BC=3$，$CD=2.4$，$A'B'=2.2$，$B'C'=2$，$\angle B=70°$，$\angle C=110°$，$\angle D=90°$. 求边 AB、$C'D'$ 的长和 $\angle A'$ 的度数.

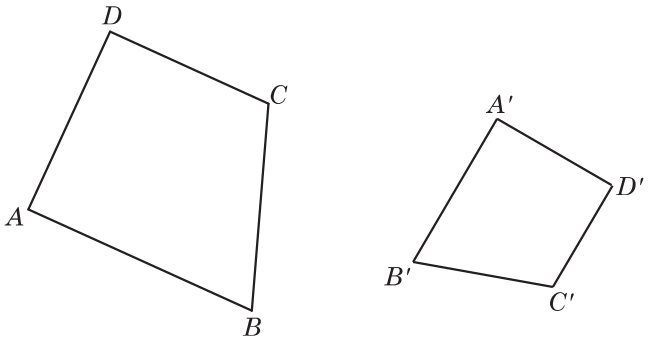


图 28-3-2

解 因为四边形 $ABCD$ 与四边形 $A'B'C'D'$ 相似，点 A 与点 A'、点 B 与点 B'、点 C 与点 C'、点 D 与点 D' 分别是对应顶点，所以

$$\angle A=\angle A',\ \frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}.$$

由 $BC=3$，$CD=2.4$，$A'B'=2.2$，$B'C'=2$，得

$$\frac{2.2}{AB}=\frac{2}{3}=\frac{C'D'}{2.4}.$$

解得 $AB=3.3$，$C'D'=1.6$.

在四边形 $ABCD$ 中，$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360°$.

由 $\angle B=70°$，$\angle C=110°$，$\angle D=90°$，得

$$\angle A=360°-(70°+110°+90°)=90°.$$

所以，$\angle A'=90°$.

思考

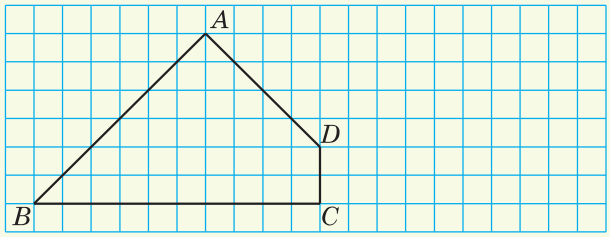
（1）四个内角都对应相等的两个四边形一定相似吗？为什么？

（2）如果两个四边形的边依次对应成比例，那么它们一定相似吗？为什么？

课堂练习 28.3

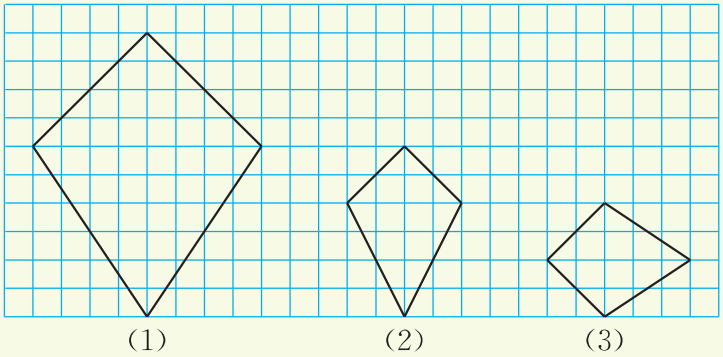
1. 已知四边形 $ABCD$ 与四边形 $A'B'C'D'$ 相似，并且点 A 与点 A'、点 B 与点 B'、点 C 与点 C'、点 D 与点 D' 分别是对应顶点，其中 AB、BC、CD、DA 的长分别为 12 cm、16 cm、16 cm、20 cm，$A'B'$ 的长为 9 cm. 求 $B'C'$、$C'D'$、$D'A'$ 的长.

2. 如图，画出四边形 $ABCD$ 的一个相似图形，使得它与原四边形 $ABCD$ 的相似比为 $\frac{1}{2}$.



（第 2 题）

3. 如图，四边形(2)与四边形(3)中哪一个与四边形(1)相似？说明理由.



（第 3 题）

28.4 位似多边形

我们在上一节学习了相似多边形，本节中将讨论与之密切相关的位似多边形.

如图 28-4-1，给定四边形 $ABCD$，可以用如下的方法将它放大为原来的 2 倍：在平面上任取一点 O，在射线 OA、OB、OC、OD 上分别取点 A_1、B_1、C_1、D_1，使得 $OA_1=2OA$，$OB_1=2OB$，$OC_1=2OC$，$OD_1=2OD$. 根据相似三角形的知识，可知四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 与四边形 $ABCD$ 相似，并且相似比为 2.

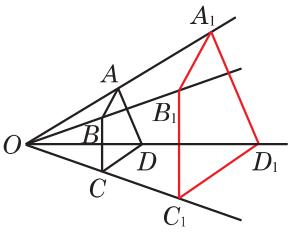


图 28-4-1

用上述方法按一定比例进行放缩所得的两个图形之间的关系就是位似关系. 显然，位似关系是一种特殊的相似关系.

思考

我们可以仿照上述平面几何的方式来定义位似多边形，那么能否借助平面直角坐标系来定义和讨论位似呢?

如图 28-4-2，在平面直角坐标系中有一点 $A(x,y)$. 点 A_1 在射线 OA 上，并且 $OA_1=2OA$，那么根据成比例线段的知识，A_1 的坐标为 $(2x,2y)$. 同理，如果点 A_2 在射线 OA 的反向延长线上，并且 $OA_2=2OA$，那么 A_2 的坐标为 $(-2x,-2y)$.

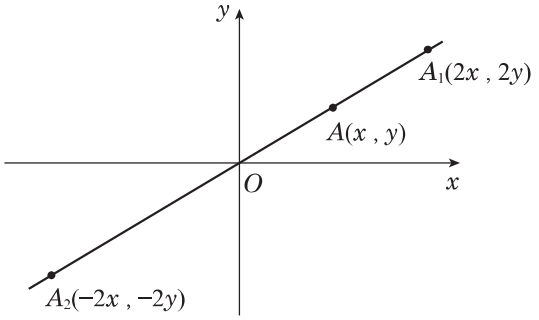


图 28-4-2

现在考虑多边形的放缩. 如图 28-4-3(1)，在平面直角坐标系中有一个四边形 $ABCD$. 像图 28-4-1 一样，在射线 OA、OB、OC、OD 上分别取点 A_1、B_1、C_1、D_1，使得 $OA_1=2OA$，$OB_1=2OB$，$OC_1=2OC$，$OD_1=2OD$. 前面我们已经知道，四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 与四边形 $ABCD$ 相似，并且相似比为 2. 又由图 28-4-2 知道，点 A_1、B_1、C_1、D_1 的横、纵坐标分别是点 A、B、C、D 的横、纵坐标的 2 倍.

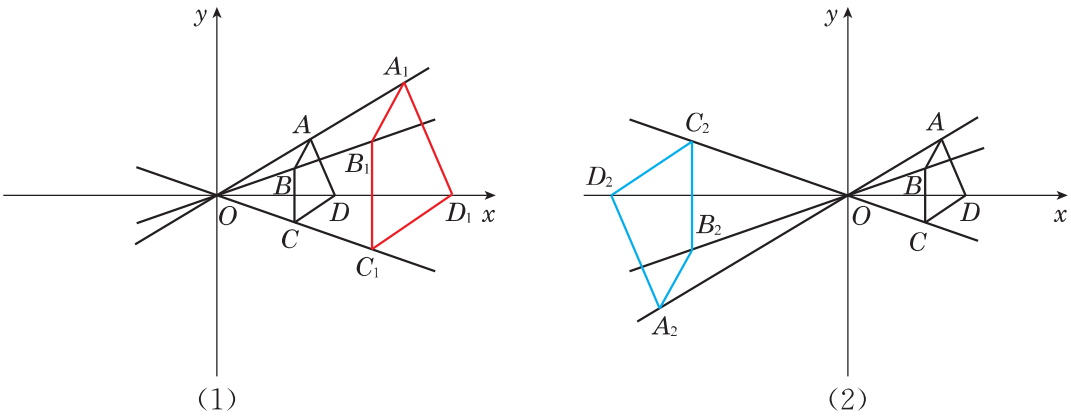


图 28-4-3

如果在射线 OA、OB、OC、OD 的反向延长线上分别取点 A_2、B_2、C_2、D_2，使得 $OA_2=2OA$，$OB_2=2OB$，$OC_2=2OC$，$OD_2=2OD$，如图 28-4-3(2)所示，那么点 A_2、B_2、C_2、D_2 的横、纵坐标分别是点 A、B、C、D 的横、纵坐标的 -2 倍. 这时，四边形 $A_2B_2C_2D_2$ 与四边形 $ABCD$ 也相似，并且相似比为 2.

一般地，在平面直角坐标系中有两个 n 边形，分别记作多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 和多边形 $A'_1A'_2\cdots A'_n$. 如果存在一个非零常数 k，使得对任意 $i(i=1,2,\cdots,n)$，点 A'_i 的横、纵坐标都是点 A_i 的横、纵坐标的 k 倍，那么就称多边形 $A'_1A'_2\cdots A'_n$ 与多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 关于原点**位似**，原点 O 为位似中心，k 为位似比. 这时，通常简称这两个多边形位似.

在图 28-4-3 中，四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 与四边形 $ABCD$ 位似，位似比为 2. 四边形 $A_2B_2C_2D_2$ 与四边形 $ABCD$ 也位似，位似比为 -2.

如果多边形 $A'_1A'_2\cdots A'_n$ 与多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 位似，并且位似比为 k，那么

多边形 $A'_1A'_2\cdots A'_n$ 与多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 一定相似，并且相似比为 $|k|$. 于是，可以利用位似放大(若 $|k|>1$)或缩小(若 $0<|k|<1$)一个多边形.

特别地，当位似比 $k=1$ 时，两个位似形重合；当位似比 $k=-1$ 时，两个位似形关于原点中心对称.

例 1 如图 28-4-4，在平面直角坐标系中，四边形 $OABC$ 四个顶点的坐标分别是 $O(0,0)$、$A(-1,3)$、$B(-4,4)$、$C(-6,0)$，画出与四边形 $OABC$ 关于原点位似的四边形，且它与四边形 $OABC$ 的位似比为 $-\frac{1}{2}$.

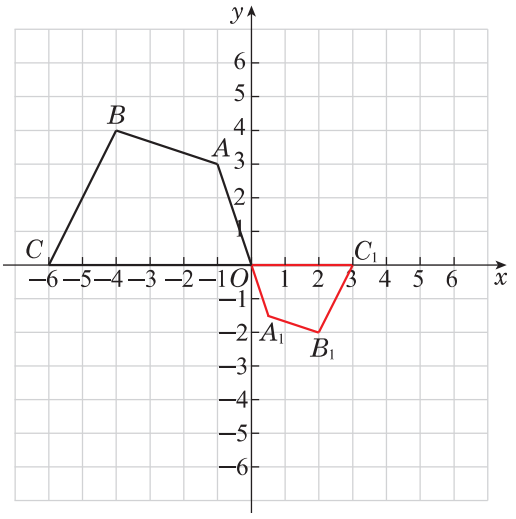


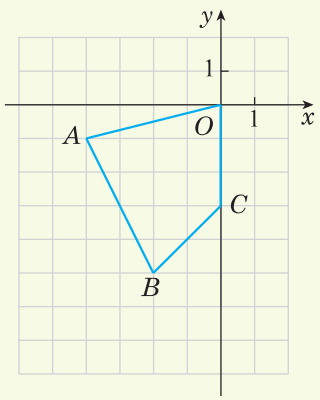
图 28-4-4

分析 为了使画出的四边形与原四边形的位似比为 $-\frac{1}{2}$，可以将原四边形每个顶点的横、纵坐标都乘 $-\frac{1}{2}$.

解 将四边形 $OABC$ 各顶点的坐标都乘 $-\frac{1}{2}$，得点 $O(0,0)$、$A_1\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$、$B_1(2,-2)$、$C_1(3,0)$. 如图 28-4-4，在平面直角坐标系中描出点 A_1、B_1、C_1，顺次连接点 O、A_1、B_1、C_1. 所得的四边形 $OA_1B_1C_1$ 与四边形 $OABC$ 关于原点位似，且位似比为 $-\frac{1}{2}$.

课堂练习 28.4

1. 如图，在平面直角坐标系中，画出与四边形 $OABC$ 关于原点位似的四边形，且它与四边形 $OABC$ 的位似比为 $\frac{2}{3}$.



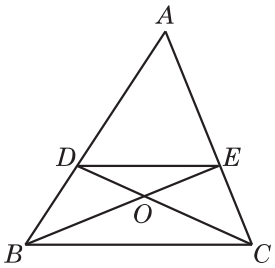
（第 1 题）

2. 在平面直角坐标系中，如果第一个多边形与第二个多边形关于原点位似，位似比为 k_1，第二个多边形与第三个多边形关于原点位似，位似比为 k_2，那么第一个多边形与第三个多边形关于原点位似吗？如果位似，位似比为多少？

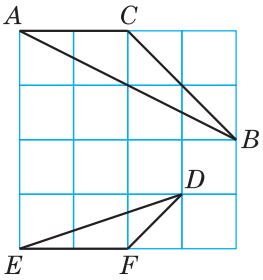
习题 28.2—28.4

A

1. 如图，已知点 D、E 分别在△ABC 的边 AB、AC 上，$DE \parallel BC$，CD 与 BE 相交于点 O. 图中有哪几对三角形是相似三角形？



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，每个小方格的边长都为 1 个单位长度，△ABC 和△DEF 的顶点都在格点位置. 试判断这两个三角形是否相似，并证明你的结论.

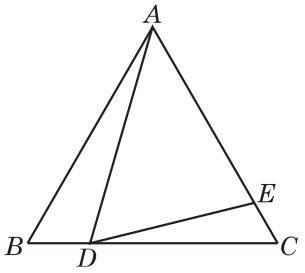
3. 已知两个相似三角形的一组对应边的边长分别是 35 cm 和 14 cm.

（1）如果它们的周长相差 60 cm，求这两个三角形的周长；

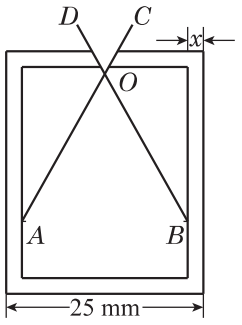
（2）如果它们的面积相差 420 cm^2，求这两个三角形的面积.

4. 证明：相似三角形对应中线的比等于相似比.

5. 如图，已知：$\triangle ABC$ 是等边三角形，点 D、E 分别在边 BC、AC 上，$\angle ADE=60^\circ$. 求证：$\dfrac{AB}{DC}=\dfrac{BD}{CE}$.



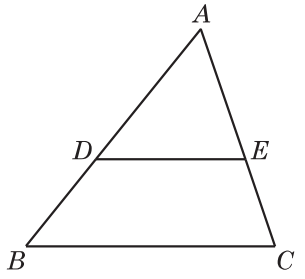
（第 5 题）



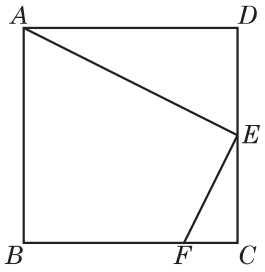
（第 6 题）

6. 如图是一个零件的剖面图，已知零件的外径为 25 mm，为求出它的厚度 x，需先求出内孔的直径 AB，但不能直接量出 AB. 现用一个交叉卡钳（AC 和 BD 的长相等）去量，若 $\dfrac{OC}{OA}=\dfrac{OD}{OB}=\dfrac{1}{3}$，且量得 CD 长为 7 mm. 求零件的厚度 x.

7. 如图，已知点 D、E 分别在 $\triangle ABC$ 的边 AB 和 AC 上，$DE\parallel BC$，$\triangle ABC$ 的面积为 S，$BC=a$，$\triangle ADE$ 的面积为 S_1. 求 DE 的长（用含 S、S_1、a 的代数式表示）.



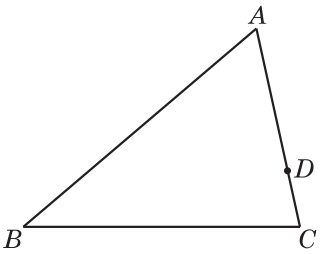
（第 7 题）



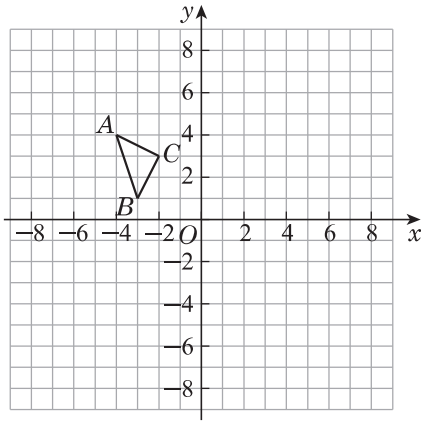
（第 8 题）

8. 如图，已知正方形 $ABCD$ 中，E 是边 CD 的中点，点 F 在边 BC 上，且 $BC=4CF$. 求 $\dfrac{AE}{EF}$ 的值.

9. 如图，已知$\triangle ABC$中，点D在边AC上，$AB=12$ cm，$AC=8$ cm，$AD=6$ cm. 当点P在边AB上，且$\angle ADP=\angle ABC$时，点P在边AB上的什么位置？



（第9题）



（第10题）

10. 如图，$\triangle ABC$各顶点的坐标分别为$A(-4,4)$、$B(-3,1)$、$C(-2,3)$. 在平面直角坐标系中，画出与$\triangle ABC$关于原点位似的三角形，使它与$\triangle ABC$的位似比为-2，并写出其各顶点的坐标.

B

11. 已知：在$\triangle ABC$中，$\angle CAB=60°$，D是$\triangle ABC$内的一点，且满足$\angle CDA=\angle ADB=\angle CDB$. 求证：线段$DA$是线段$DB$、$DC$的比例中项.

12. 在$\triangle ABC$内部是否存在一点O，使得过点O的任意一条直线都平分$\triangle ABC$的面积？（提示：如果存在这样的点O，可以先考虑过O和顶点的直线）

◎阅读材料

黄 金 分 割

我们知道，黄金分割是指“将一条线段分为不相等的两部分，使较长部分为原线段和较短部分的比例中项”. 如果 P 是线段 AB 的一个黄金分割点，且 $AP>PB$，那么 $AP^2=AB\cdot PB$. 这时，$AP=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}AB$，$AP$ 与 AB 的比值 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$称为黄金数.

怎样用尺规把线段 AB 黄金分割呢？下面给出一种方法.

如图 1，

(1) 过点 B 作 $BC\perp AB$，使 $BC=\dfrac{1}{2}AB$；

(2) 连接 AC，在线段 AC 上截取 $CD=CB$；

(3) 在线段 AB 上截取 $AP=AD$.

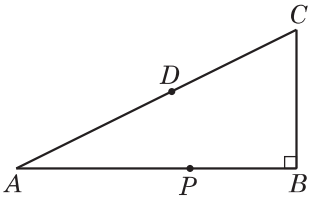


图 1

那么 $\dfrac{AP}{AB}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

下面证明这种作图方法的正确性.

证明 设 $AB=a$，则 $BC=\dfrac{a}{2}$. 由勾股定理，得

$$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}a.$$

根据作法，

$$AP=AD=AC-CD=AC-BC=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a,$$

所以 $\dfrac{AP}{AB}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

黄金分割体现出部分与整体之间的协调一致性，具有其美感.

如果一个矩形的短边与长边之比是黄金数，这个矩形就称为黄金矩形(图2). 人们觉得，在各种矩形中，黄金矩形最为赏心悦目. 顶角为36°的等腰三角形称为黄金三角形(图3)，它的底边与腰之比是黄金比. 如图4，在正五角星中包含了许多黄金三角形，许多线段之间构成了黄金比，因此正五角星得到了古今中外人们的喜爱，较多场景中都能见到它的身影.

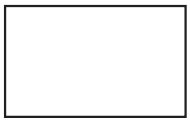


图2

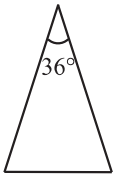


图3

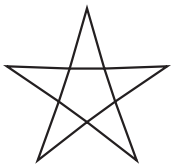


图4

黄金分割的应用很多. 例如，在著名的维纳斯女神像(图5)以及太阳神阿波罗的塑像中，在达·芬奇(Leonardo da Vinci，1452—1519)、提香(Tiziano Vecellio，约1489—1576)等众多著名艺术家的作品中，都隐含着许多黄金比. 在科学实验中，为减少试验步骤而得到最佳结果，常用优选法，其中0.618法就是以黄金分割为其核心的. 在日常生活中，人们也喜欢应用黄金分割. 例如，在拍风景照时，常把主要景物放在接近于画面的黄金分割点处，使整个画面协调好看；舞台上报幕员总是站在接近于舞台的黄金分割点处，显得大方得体；芭蕾舞演员踮起脚尖起舞(图6)，使腰部成为整个身形的黄金分割点，给观众带来美的享受；在设计长方形工艺品或日用品时，常设计成黄金矩形的形态，这样更具美感.



图5



图6

黄金分割是一条公认的美学规律，在数学、美学、艺术等领域中显示出巨大的魅力.

三角形的垂心

我们已经知道，三角形的三条中线交于一点，该点称为三角形的重心. 此外，三条角平分线交于一点(该点称为三角形的内心)，三边上的垂直平分线也交于一点(该点称为三角形的外心). 现在我们要证明三角形的三条高所在直线交于一点，该点称为三角形的垂心.

在“三角形”这一章，通过画图我们已经意识到锐角三角形的三条高交于三角形内一点，钝角三角形三条高所在的直线交于三角形外一点，而直角三角形的三条高必定交于其直角顶点. 下面以锐角三角形的情形为例证明这一结论.

我们利用相似三角形来加以证明.

证明 如图 1，在$\triangle ABC$ 中，$BF\perp AC$，$CE\perp AB$，且 BF 与 CE 交于点 D. 连接 AD 并延长交 BC 于点 G.

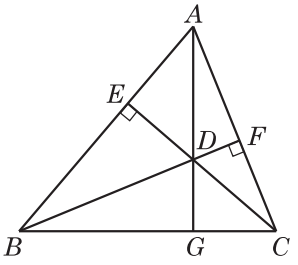


图 1

由 $BF\perp AC$，$CE\perp AB$，得$\angle ABF+\angle BAC=90^\circ$，$\angle ACE+\angle BAC=90^\circ$，从而 $\angle ABF=\angle ACE$. 所以 $\mathrm{Rt}\triangle ABF\backsim\mathrm{Rt}\triangle DCF$，并由此得$\dfrac{AF}{BF}=\dfrac{DF}{CF}$. 从这个比例式又可得到 $\mathrm{Rt}\triangle ADF\backsim\mathrm{Rt}\triangle BCF$，于是$\angle DAF=\angle CBF$，由此得到

$$\begin{aligned}\angle AGC&=180^\circ-\angle DAF-\angle ACG\\&=180^\circ-\angle CBF-\angle BCF\\&=\angle BFC=90^\circ,\end{aligned}$$

即 $AG\perp BC$.

请自己思考并证明钝角三角形三条高所在直线也交于一点的结论.

另一方面，也可以将证明三角形的三条高交于一点的问题转化为另一个三角形的三条边的垂直平分线交于一点的问题，而后者前面已学过. 具体证明如下.

证明 如图 2，在△ABC 中，$BF\perp AC$，$CE\perp AB$，$AG\perp BC$.（注意，这里并没有说 BF、CE、AG 交于一点.）

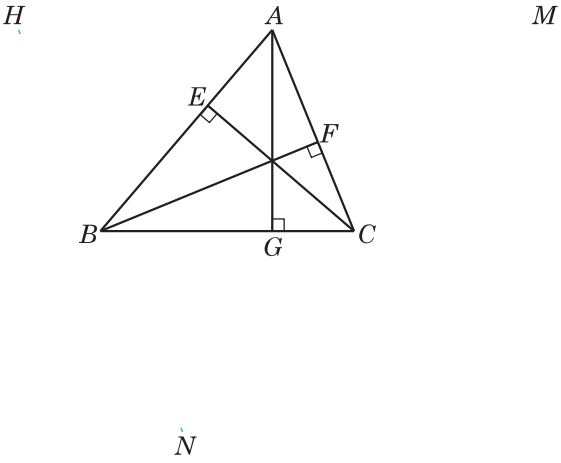


图 2

分别过点 A、B、C 作对边的平行线，它们的交点分别记为 H、M、N，如图 2 所示. 根据平行四边形的定义，我们得到平行四边形 $HACB$、$ABCM$、$ABNC$. 于是，$HA=BC=AM$，从而直线 AG 是 HM 的垂直平分线. 同理，可以得到直线 BF、CE 分别是 HN、MN 的垂直平分线. 所以，作为△HMN 三条边的垂直平分线 AG、BF、CE 交于一点，它是△HMN 的外心.

在平面几何中，相对于三角形的三边上的垂直平分线、三条角平分线、三条中线分别交于一点而言，三条高交于一点的证明难度是比较高的. 在高中进一步学习平面解析几何后，会有更简单的证明方法.

◎内容提要

1. 基本概念：成比例的线段，相似三角形，相似比，相似多边形，位似多边形(平面直角坐标系中).

2. 成比例的线段：

(1) 平行于三角形一边的直线截其他两边所在的直线，截得的对应线段成比例.

(2) 两条直线被三条平行线所截，截得的对应线段成比例.

3. 相似三角形的判定：

(1) 预备定理：平行于三角形一边的直线截其他两边所在的直线，截得的三角形与原三角形相似.

(2) 判定定理：

两角对应相等的两个三角形相似.

两边对应成比例且夹角相等的两个三角形相似.

三边对应成比例的两个三角形相似.

(3) 直角三角形相似的判定定理：斜边和一条直角边对应成比例的两个直角三角形相似.

4. 相似三角形的性质：

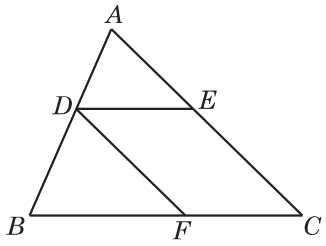
相似三角形对应高、对应中线、对应角平分线以及周长的比都等于相似比，面积的比等于相似比的平方.

◎复习题

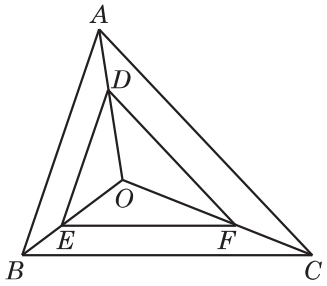
A

1. 把同一个三角形地块按不同的比例尺画成甲、乙两幅图. 设甲图的比例尺为 1∶200，乙图的比例尺为 1∶1 000，求甲图与乙图的相似比和面积比.

2. 如图，已知点 D、E、F 分别在 $\triangle ABC$ 的边 AB、AC、BC 上，$DE/\!/BC$，$DF/\!/AC$，$AE=6$，$CE=8$. 求 $BF:FC$ 的值.



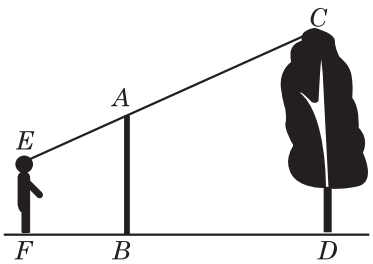
（第 2 题）



（第 3 题）

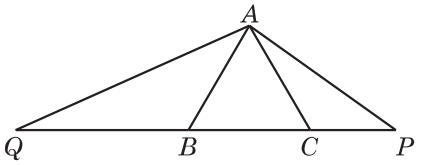
3. 如图，已知点 O 在 $\triangle ABC$ 的内部，点 D、E、F 分别在线段 OA、OB、OC 上，$\dfrac{OD}{OA}=\dfrac{OE}{OB}=\dfrac{OF}{OC}$. 求证：$\triangle ABC\backsim\triangle DEF$.

4. 如图，竖立在点 B 处的标杆 $AB=2.5$ m，某观察者站立在点 F 处，从点 E 处看到杆顶 A、树顶 C 在同一直线上（点 F、B、D 也在同一直线上）. 已知 $BD=4.4$ m，$FB=2.2$ m，人的眼睛离地面的距离 $EF=1.5$ m. 求树高.

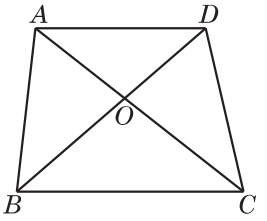


（第 4 题）

5. 如图，点 P 在等边三角形 ABC 的边 BC 的延长线上，$\angle PAQ=120^\circ$，射线 AQ 与 CB 的延长线交于点 Q. $\triangle ABQ$ 与 $\triangle PCA$ 是否相似？为什么？



（第 5 题）

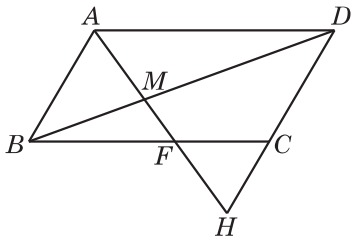


（第 6 题）

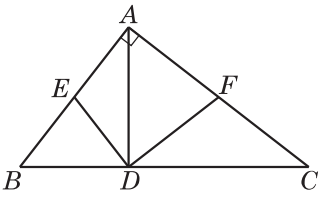
6. 如图，在梯形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，$S_{\triangle AOD}=9$，$S_{\triangle BOC}=16$. 求 $S_{梯形ABCD}$.

B

7. 如图，已知：M 是平行四边形 $ABCD$ 的对角线 BD 上的一点，射线 AM 与 BC 交于点 F，与 DC 的延长线交于点 H. 求证：$AM^2=MF\cdot MH$.



（第 7 题）



（第 8 题）

8. 如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90^\circ$，$AD\perp BC$ 于点 D. 点 E、F 分别在边 AB、CA 上，满足 $\angle EDF=90^\circ$. 求证：$\dfrac{BE}{AF}=\dfrac{AB}{AC}$.



第 29 章

三角初步

在测绘、航海及天文中经常会涉及三角形边与角之间的关系. 我们已经知道：三角形中大边对大角、大角对大边. 但这只是对三角形的边与角关系的定性描述. 为了定量刻画三角形的边与角之间的关系，需要引入一个角的正弦、余弦、正切等概念.

在本章中，我们将对锐角引入这些概念，讨论其性质，利用它们求解直角三角形，为高中阶段继续学习任意角的三角以及三角函数奠定基础.

29.1 锐角的正弦、余弦与正切

1. 锐角的正弦与余弦

问题 小张和小李分别在甲、乙两个驾驶证考点参加“坡道定点停车与起步”科目的考试. 小张从两个考点的官网上获悉：他所参加的甲考点的斜坡长是 28 m，高是 2.66 m，而小李参加的乙考点的斜坡长是 32 m，高是 3.04 m. 两个考点的斜坡长度和高度都不一样，是否会给考试者带来不公平呢？



分析 对于坡道定点停车与起步，当不考虑坡面质地不同造成的摩擦系数不同时，造成定点停车与起步难度不同的主要因素是斜坡的倾斜程度.

如图 29-1-1，在$\triangle ABC$和$\triangle DEF$中，$\angle C=\angle F=90^\circ$，$AB=28$，$AC=2.66$，$DE=32$，$DF=3.04$.

于是，只需比较$\angle B$与$\angle E$的大小即可.



图 29-1-1

解 计算两个三角形直角边与斜边之比，可知$\dfrac{AC}{AB}=0.095$，$\dfrac{DF}{DE}=0.095$，于是$\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{DF}{DE}$，又$\angle C=\angle F=90^\circ$，从而可得$\triangle ABC\backsim\triangle DEF$，于是$\angle B=\angle E$. 所以这两个考点斜坡的倾斜程度是一样的，即难度相同，对小张和小李两位考试者是公平的.

实际上，利用相似三角形的判定与性质定理，容易得到在不同的直角三角形中，如果它们的一条直角边与斜边的比值相等，那么该直角边所对的锐

角也相等；反过来，如果其一条直角边所对的锐角相等，那么该角所对的直角边与斜边的比值也相等.

直角三角形中一个锐角的对边与斜边之比叫作这个锐角的**正弦**.

在$\triangle ABC$中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的对边分别用a、b、c表示. 而在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，若$\angle C=90^\circ$，直角边BC和AC分别称为$\angle A$的对边和邻边，而直角边AC和BC分别称为$\angle B$的对边和邻边.

如图29-1-2，在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$\angle C=90^\circ$，锐角A的正弦记作$\sin A$，其值为

$$\sin A=\frac{\text{锐角 } A \text{ 的对边}}{\text{斜边}}=\frac{BC}{AB}=\frac{a}{c}.$$

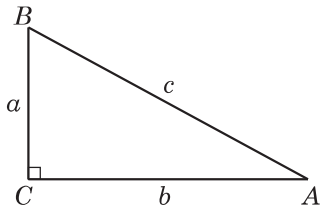


图 29-1-2

由上述分析与定义可知，如果一个锐角的大小确定了，那么这个角的正弦值也就确定了；反过来，如果一个锐角的正弦值确定了，那么这个锐角的大小也就确定了.

当角α在0°到90°的范围内增大时，$\sin\alpha$的值如何变化?

如图29-1-3，一个圆心角为90°的扇形AOB，点C、D在$\overset{\frown}{AB}$上，$CC_1\perp OA$，$DD_1\perp OA$，垂足分别为C_1、D_1. 记$\angle COC_1=\alpha_1$，$\angle DOD_1=\alpha_2$，满足$\alpha_2>\alpha_1$，则$DD_1>CC_1$. 于是$\sin\alpha_1=\dfrac{CC_1}{OC}$，$\sin\alpha_2=\dfrac{DD_1}{OD}$. 由$OC=OD$，得$\sin\alpha_2>\sin\alpha_1$. 所以，当角$\alpha$在$0^\circ$到$90^\circ$的范围内增大时，$\sin\alpha$的值也增大. 由此可知，不仅给定$\alpha$值时$(0^\circ<\alpha<90^\circ)$，可唯一地确定$\sin\alpha$值，而且给定$\sin\alpha$值时，亦可唯一地确定$\alpha$值.

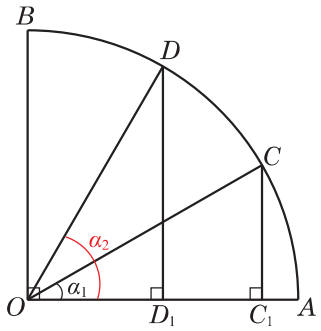


图 29-1-3

思考

锐角A的取值范围是$0^\circ<\angle A<90^\circ$，其正弦值的取值范围是什么?

由勾股定理可知，如果确定了直角三角形中的一条直角边和斜边的长，那么它的另一条直角边的长也就确定了. 所以，在直角三角形中，如果一个锐

角的大小确定了，那么这个角的邻边与斜边的比值也就确定了；反过来，如果直角三角形中一个锐角的邻边与斜边的比值确定了，那么这个锐角的大小也就确定了.

直角三角形中一个锐角的邻边与斜边之比叫作这个锐角的**余弦**.

如图 29-1-4，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，锐角 A 的余弦记作 $\cos A$，其值为

$$\cos A=\frac{\text{锐角 } A \text{ 的邻边}}{\text{斜边}}=\frac{AC}{AB}=\frac{b}{c}.$$

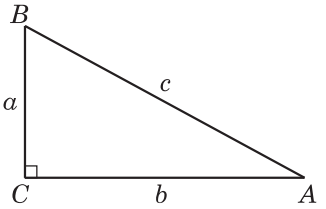


图 29-1-4

例 1 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$AB=3$，$BC=2$. 求 $\sin A$、$\cos A$、$\sin B$ 和 $\cos B$ 的值.

解 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$.

$\because$ $AB=3$，$BC=2$，

$\therefore$ $AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{5}$.

于是 $\sin A=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{2}{3}$，$\cos A=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，

$\sin B=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，$\cos B=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{2}{3}$.

例 2 如图 29-1-5，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$\sin A=\dfrac{4}{5}$. 求 $\cos A$、$\sin B$ 和 $\cos B$ 的值.

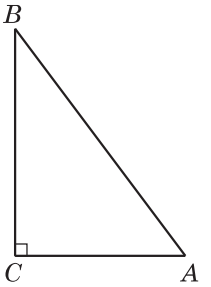


图 29-1-5

解 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$\sin A=\dfrac{4}{5}$，从而 $\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{4}{5}$.

令 $AB=5k$，$BC=4k(k>0)$，由勾股定理，得

$$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=3k.$$

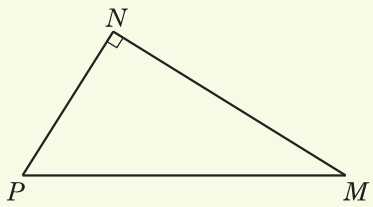
所以，$\cos A=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{3}{5}$，$\sin B=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{3}{5}$，$\cos B=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{4}{5}$.

思考

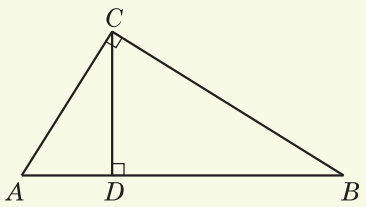
从例 1、例 2 可以看出，$\sin A=\cos B$，$\cos A=\sin B$. 那么，对于任意两个互余的锐角，上述结论是否仍然成立？

课堂练习 29.1(1)

1. 如图，在 Rt△MNP 中，$\angle N=90^\circ$，$\angle P$ 的对边是_____，$\angle P$ 的邻边是_____；$\angle M$ 的对边是_____，$\angle M$ 的邻边是_____.



（第 1 题）



（第 2 题）

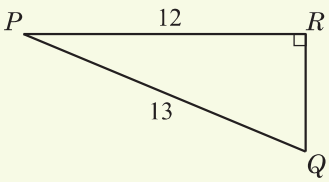
2. 如图，在△ABC 中，$\angle ACB=90^\circ$，$CD\perp AB$，垂足为 D.

（1）在 Rt△ABC 中，$\angle A$ 的对边是_____，$\angle A$ 的邻边是_____；

在Rt△ACD 中，$\angle A$ 的对边是_____，$\angle A$ 的邻边是_____.

（2）在 Rt△_____ 中，$\angle B$ 的对边是 AC；在 Rt△_____ 中，$\angle B$ 的邻边是 BD.

3. 如图，在△PQR 中，$\angle R=90^\circ$，$PQ=13$，$PR=12$. 求 $\sin P$、$\cos P$、$\sin Q$ 和 $\cos Q$ 的值.



（第 3 题）

2. 锐角的正切

锐角的正弦和余弦表示的是直角三角形中两条直角边与斜边之比，那么直角三角形两条直角边之比又如何表示呢?

直角三角形中一个锐角的对边与邻边之比叫作这个锐角的**正切**.

如图 29-1-6，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90^\circ$，锐角 A 的正切记作 $\tan A$，其值为

$$\tan A=\frac{\text{锐角 } A \text{ 的对边}}{\text{锐角 } A \text{ 的邻边}}=\frac{BC}{AC}=\frac{a}{b}.$$

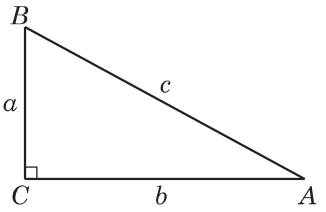


图 29-1-6

一般地，如果一个锐角的大小确定了，那么这个锐角的正弦、余弦与正切值也是唯一确定的；反之，如果一个锐角的正弦、余弦或正切值确定了，那么这个锐角的大小也是唯一确定的.

例 3 如图 29-1-7，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90^\circ$，$AB=17$，$BC=8$. 求 $\tan A$ 和 $\tan B$ 的值.

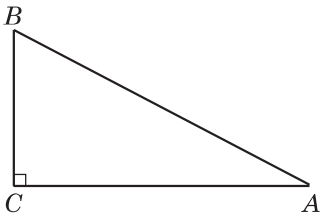


图 29-1-7

解 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90^\circ$.

因为 $AB=17$，$BC=8$，由勾股定理，得 $AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=15$.

于是 $\tan A=\frac{BC}{AC}=\frac{8}{15}$，$\tan B=\frac{AC}{BC}=\frac{15}{8}$.

例 4 如图 29-1-8，在平面直角坐标系中有一点 $P(3,4)$. 求 OP 与 x 轴正半轴的夹角 α 的正切、正弦和余弦值.

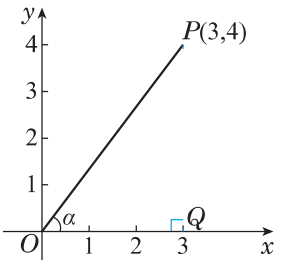


图 29-1-8

解 过点 P 向 x 轴引垂线，垂足为 Q，则 $\angle OQP=90^\circ$.

由点 P 的坐标为(3,4)，得 $OQ=3$，$QP=4$.

在 Rt△OPQ 中，$OP=\sqrt{OQ^2+PQ^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

所以，$\tan\alpha=\dfrac{PQ}{OQ}=\dfrac{4}{3}$，$\sin\alpha=\dfrac{PQ}{OP}=\dfrac{4}{5}$，$\cos\alpha=\dfrac{OQ}{OP}=\dfrac{3}{5}$.

思考

从例 4 可以看出，$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. 那么，对于任意锐角，是否存在同样的结论呢？

例 5 如图 29-1-9，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90^\circ$，$BC=6$，$\sin A=0.75$.

（1）求 AB 的长；

（2）求 $\tan A$ 和 $\tan B$ 的值.

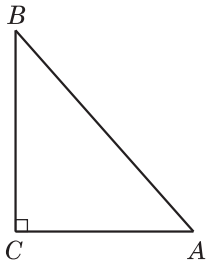


图 29-1-9

解 （1）在 Rt△ABC 中，$\angle C=90^\circ$.

因为 $\sin A=\dfrac{BC}{AB}$，所以 $AB=\dfrac{BC}{\sin A}$.

又 $BC=6$，$\sin A=0.75$，故 $AB=\dfrac{6}{0.75}=8$.

（2）由勾股定理，得 $AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=2\sqrt{7}$.

所以，$\tan A=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{6}{2\sqrt{7}}=\dfrac{3\sqrt{7}}{7}$，$\tan B=\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$.

思考

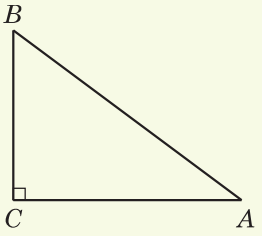
从例 5 可以看出，$\tan A\cdot\tan B=1$. 那么，对于任意两个互余的锐角，上述结论是否仍然成立？

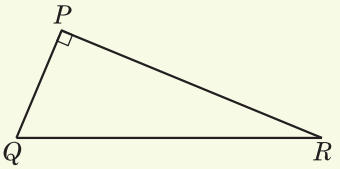
课堂练习 29.1(2)

1. 如图，△ABC 和△PQR 是直角三角形，$\angle C=\angle P=90^\circ$.

（1）若 $AC=4$，$BC=3$，求 $\sin A$、$\tan B$ 的值；

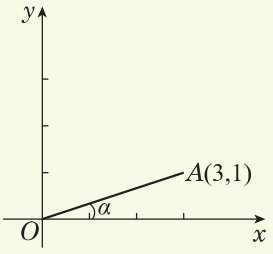
（2）若 $PQ=5$，$QR=13$，求 $\tan R$、$\tan Q$ 的值.



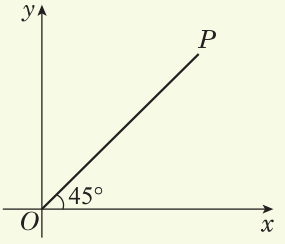


（第 1 题）

2. 如图，在平面直角坐标系中有一点 $A(3,1)$，原点 O 与点 A 的连线与 x 轴正半轴的夹角为 α. 求 $\sin\alpha$、$\cos\alpha$、$\tan\alpha$ 的值.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，在平面直角坐标系中，原点 O 与点 P 的距离 $OP=2$，原点 O 与点 P 的连线与 x 轴正半轴的夹角为 $45°$. 求点 P 的坐标以及 $\sin 45°$、$\tan 45°$的值.

3. 求给定锐角的正弦、余弦与正切值

如何求一个给定锐角的正弦、余弦与正切值呢？我们先从 $30°$、$45°$和 $60°$这些特殊锐角着手.

对于一个含 $30°$角的 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$，其中 $\angle C=90°$，$\angle A=30°$（图 29-1-10）. 设 $BC=a$，可得 $AB=2a$，$AC=\sqrt{3}\,a$. 于是 $\sin 30°=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{1}{2}$，$\cos 30°=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

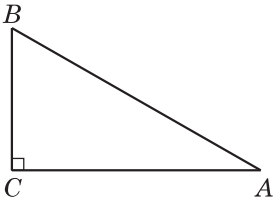


图 29-1-10

$\tan 30^\circ=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

易知，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle B=60^\circ$，所以

$$\sin 60^\circ=\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos 60^\circ=\frac{BC}{AB}=\frac{1}{2},\ \tan 60^\circ=\frac{AC}{BC}=\sqrt{3}.$$

请自行尝试计算 $\sin 45^\circ$、$\cos 45^\circ$和 $\tan 45^\circ$.

将这些特殊锐角的正弦、余弦与正切值，列表如下：

表 29-1

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
30°	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

由表 29-1，还可以根据这些特殊锐角的正弦、余弦或正切值，反过来确定相应锐角的度数.

例 6 求下列各式的值：

(1) $\sin^2 45^\circ+\cos^2 45^\circ$；

(2) $\sin 60^\circ\cdot\cos 30^\circ-\sin 30^\circ\cdot\cos 60^\circ$；

(3) $\dfrac{2\sin^2 60^\circ-\cos 60^\circ}{\tan^2 60^\circ-4\cos 45^\circ}$.

$\sin^2 A$ 表示$(\sin A)^2$，其余类同.

解 (1) $\sin^2 45^\circ+\cos^2 45^\circ=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=1$.

(2) $\sin 60^\circ\cdot\cos 30^\circ-\sin 30^\circ\cdot\cos 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$.

(3) $\dfrac{2\sin^2 60^\circ-\cos 60^\circ}{\tan^2 60^\circ-4\cos 45^\circ}=\dfrac{2\times\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}}{(\sqrt{3})^2-4\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}}{3-2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{3-2\sqrt{2}}=3+2\sqrt{2}$.

探究

从例 6(1)可以看出，45°角的正弦与余弦两者的平方和恰为 1. 那么，对于任意锐角，上述结论是否仍然成立？

为了近似计算任意锐角的正弦、余弦或正切值，前人通过计算汇总成可供查阅的表格. 除 30°、45°和 60°这三个特殊度数的锐角可以直接利用表 29-1，在锐角的度数和相应的正弦、余弦或正切值间相互获得外，一般需要通过具有功能键 sin、cos、tan（或 tg）的计算器求出给定锐角的正弦、余弦和正切值，或由给定锐角的正弦、余弦或正切值求得这个锐角的大小. 通常，计算器所显示的值为近似值.

由于初中阶段表示角度的单位是“度、分、秒”，因此在使用计算器求锐角的正弦、余弦或正切值时，首先必须进入“角度单位”中的“度(D)”模式.

例如，求 sin 15°12′，可以利用 sin 键，再输入 1 5 °’” 1 2 °’” =，得到结果 0.262 189 178 6. 又如，已知 tan $A=2.834\ 2$，用计算器求锐角 A，可以使用 tan 键的第二功能，具体按键为 SHIFT tan 2 · 8 3 4 2 = °’”，得到结果 70°33′55.67″.

不同品牌不同型号计算器的具体操作步骤可能有所不同.

课堂练习 29.1(3)

1. 填空题：

$\sin 60°=$_____； $\cos 45°=$_____； $\tan 30°=$_____.

2. 用含特殊锐角（30°、45°、60°角）的正弦、余弦或正切的表达式填空：

$\frac{\sqrt{3}}{2}=$_____$=$_____； $1=$_____；

$\frac{\sqrt{2}}{2}=$_____$=$_____； $\sqrt{3}=$_____.

3. 求下列各式的值：

（1）$\dfrac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}-\tan 30^\circ$；　　（2）$\sin^2 30^\circ+\cos^2 30^\circ$.

4. 用计算器解下列各题：

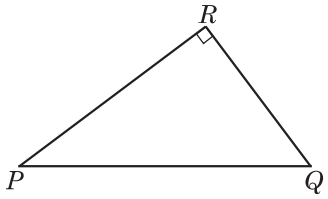
（1）求 $\cos 75^\circ 25' 16''$ 的值；

（2）已知 $\sin A=0.234\,5$，求锐角 A 的大小.

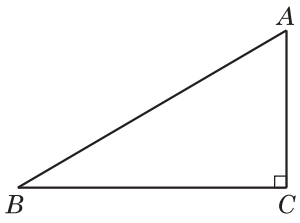
习题 29.1

A

1. 如图，在△PQR 中，$\angle R=90^\circ$，$PR=8$，$PQ=10$. 求 $\sin P$、$\cos P$、$\tan Q$ 的值.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，在△ABC 中，$\angle C=90^\circ$. 设 $AC=b$，$\angle A=\alpha$，$\angle B=\beta$.

（1）用含 b 和 α 的表达式表示 BC 的长；

（2）用含 b 和 β 的表达式表示 BC 的长；

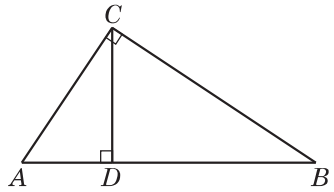
（3）用含 b 和 α 的表达式表示 AB 的长；

（4）用含 b 和 β 的表达式表示 AB 的长.

3. 如图，在△ABC 中，已知 $\angle ACB=90^\circ$. $CD\perp AB$，垂足为 D，$AD=4$，$BD=9$.

（1）求 CD 的长；

（2）求 $\tan A$、$\sin\angle BCD$、$\cos A$ 的值.



（第 3 题）

4. 求下列各式的值：

（1）$\tan 30^\circ \cdot \tan 60^\circ + \sin^2 45^\circ$；

（2）$6\tan^2 30^\circ - \sqrt{3}\sin 60^\circ - 2\cos 45^\circ$；

（3）$\cos^2 45^\circ - \dfrac{\tan 30^\circ}{2\sin 60^\circ} + \tan^2 60^\circ$；

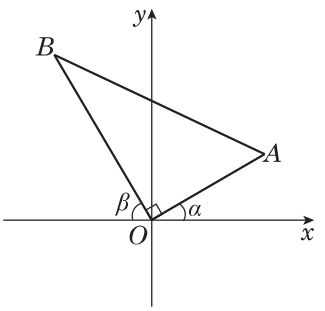
（4）$\dfrac{2\tan 45^\circ}{\sin 60^\circ + \sin 45^\circ}$.

B

5. 如图，在平面直角坐标系中的点 $A(a,2)$、$B(b,5)$，满足 $OA \perp OB$. 记 OA 与 x 轴正半轴的夹角为 α，OB 与 x 轴负半轴的夹角为 β.

（1）当 $a=4$ 时，求 $\sin\alpha$、$\tan\beta$ 的值；

（2）如果 $\triangle AOB$ 的面积为 20，求 $\sin\alpha \cdot \sin\beta$ 的值.



（第 5 题）

29.2 解直角三角形

1. 解直角三角形

我们知道，一个三角形有三条边及三个角共六个元素. 对于直角三角形而言，除了已知其中一个直角以外，其三条边和两个锐角这五个元素之间有些什么样的关系呢?

在 Rt$\triangle ABC$ 中，设$\angle C=90^\circ$，我们已经知道它的三条边和两个锐角这五个元素之间满足以下关系：

(1) 三边之间的关系：$a^2+b^2=c^2$；

(2) 两锐角之间的关系：$\angle A+\angle B=90^\circ$；

(3) 边角之间的关系：

$$\sin A=\frac{\angle A\text{ 的对边}}{\text{斜边}}=\frac{a}{c},\quad \cos A=\frac{\angle A\text{ 的邻边}}{\text{斜边}}=\frac{b}{c},\quad \tan A=\frac{\angle A\text{ 的对边}}{\angle A\text{ 的邻边}}=\frac{a}{b}.$$

将上面关系式中的$\angle A$ 换成$\angle B$，a 与b 互换，就是$\angle B$ 与边的关系式.

在直角三角形中，根据已知元素求出所有未知元素的过程，称为解直角三角形.



思考

在直角三角形除直角外的五个元素中，还需要知道几个元素，才能求出其他元素呢?

由相似三角形的相关性质可知，至少需要知道直角三角形的一条边长.

例 1 在 Rt$\triangle ABC$ 中，已知$\angle C=90^\circ$，$\angle B=38^\circ$，$a=8$. 求这个三角形的其他边和角(长度保留三位小数).

解 $\because$ $\angle A+\angle B=90^\circ$,

$\therefore$ $\angle A=90^\circ-\angle B=90^\circ-38^\circ=52^\circ$.

$\because$ $\cos B=\frac{a}{c}$,

$\therefore\quad c=\dfrac{a}{\cos B}=\dfrac{8}{\cos 38^\circ}\approx 10.152.$

$\because\quad \tan B=\dfrac{b}{a},$

$\therefore\quad b=a\cdot\tan B=8\times\tan 38^\circ\approx 6.250.$

例 2 在 Rt△ABC 中，已知$\angle C=90^\circ$，$c=7.34$，$a=5.28$. 解这个直角三角形（长度保留三位小数，角度精确到 1′）.

解 在 Rt△ABC 中，

$\because\quad \angle C=90^\circ,$

$\therefore\quad a^2+b^2=c^2.$

$\therefore\quad b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{7.34^2-5.28^2}\approx 5.099.$

$\because\quad \sin A=\dfrac{a}{c}=\dfrac{5.28}{7.34}\approx 0.719\,3,$

$\therefore\quad \angle A\approx 46^\circ 0'.$

$\therefore\quad \angle B=90^\circ-\angle A\approx 90^\circ-46^\circ 0'=44^\circ 0'.$

如无特别说明，在由正弦、余弦或正切的近似值确定相应锐角的大小时，可将该近似值保留四位小数.

在直角三角形中，只要已知两条边长或者一条边长与一个锐角，就可以求得其他所有角和边.

课堂练习 29.2(1)

1. 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90^\circ$，分别由下列条件解直角三角形：

（1）$\angle A=60^\circ$，$a=10$；

（2）$\angle B=43^\circ 21'$，$c=27.01$（长度保留三位小数，角度精确到 1′）.

2. 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90^\circ$，分别由下列条件解直角三角形（长度保留三位小数，角度精确到 1′）：

（1）$b=4.32$，$c=6.18$；

（2）$a=7.096$，$c=12.16$.

例 3 在等腰三角形 ABC 中，已知 $AB=AC$，$\angle A=40°$，$BC=6$. 求它的腰长和底角（长度保留三位小数）.

分析 根据三角形内角和等于 $180°$，可求得底角的大小. 再通过作底边上的高，将这个问题转化为解直角三角形的问题.

解 在$\triangle ABC$ 中，

$$\angle B=\angle C=\frac{1}{2}(180°-\angle A)=\frac{1}{2}(180°-40°)=70°.$$

如图 29-2-1，过点 A 作 $AD\perp BC$，垂足为 D.

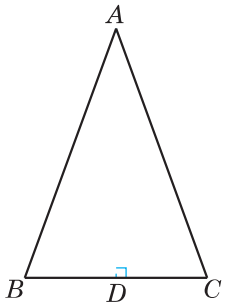


图 29-2-1

$\because$ $AB=AC$，

$\therefore$ $BD=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\times 6=3$.

在 Rt$\triangle ABD$ 中，

$\because$ $\cos B=\frac{BD}{AB}$，

$\therefore$ $AB=\frac{BD}{\cos B}=\frac{3}{\cos 70°}\approx 8.771$.

所以，这个等腰三角形的腰长约为 8.771，底角为 $70°$.

思考

在例 3 中，通过作腰上的高，是否同样能利用解直角三角形来求腰长？试一试，感受一下两者的异同.

例 4 在$\triangle ABC$ 中，已知 $AC=9$，$AB=8.5$，$\angle A=38°$. 求边 AC 上的高及$\triangle ABC$ 的面积（结果保留三位小数）.

分析 作边 AC 上的高 BD，得 Rt$\triangle ABD$. 通过解直角三角形，可求出 BD 的长，再求$\triangle ABC$ 的面积.

解 如图 29-2-2，过点 B 作 $BD\perp AC$，垂足为 D.

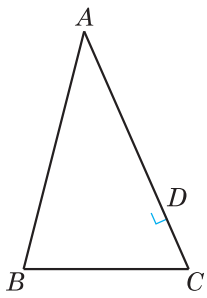


图 29-2-2

在 Rt$\triangle ABD$ 中，

$\because \quad \sin A=\dfrac{BD}{AB}$,

$\therefore \quad BD=AB\cdot\sin A=8.5\times\sin 38^\circ\approx 5.233\,1$,

$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AC\cdot BD\approx\dfrac{1}{2}\times 9\times 5.233\,1\approx 23.549$.

所以，边 AC 上的高约为 5.233，$\triangle ABC$ 的面积约为 23.549.

在近似计算过程中，通常将中间运算的结果比规定的精确度多保留一位小数.

课堂练习 29.2(2)

1. 在$\triangle ABC$ 中，$AB=AC=10$，$\angle A=80^\circ$. 求 BC 的长及$\triangle ABC$ 的面积(结果保留三位小数).

2. 在$\triangle ABC$ 中，$AB=AC=15$，$BC=24$.

(1) 求$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$(结果精确到 $1'$)；

(2) 求$\triangle ABC$ 的面积.

3. 在$\triangle ABC$ 中，$AB=5$，$BC=8$，$\angle B=60^\circ$. 求$\triangle ABC$ 的面积.

4. 在$\triangle ABC$ 中，$AB=AC=10$，$\sin B=\dfrac{4}{5}$. 求 BC 的长.

2. 解直角三角形的应用

在现实生活中，解直角三角形有着广泛的应用，我们通过几个例子来加以说明.

例 5 如图 29-2-3，在地面上离旗杆 BC 底部 10 m 的 A 处，用测角仪测得旗杆顶端 C 的仰角为 52°，已知测角仪 AD 的高为 1.5 m，求旗杆 BC 的高(结果精确到 0.1 m).

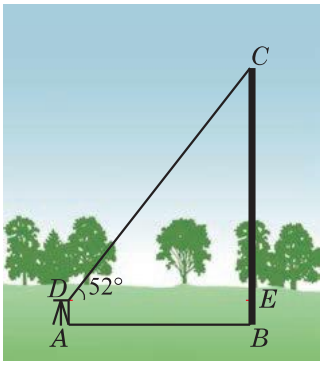


图 29-2-3

分析 题中涉及的仰角指的是在水平线上方的视线与水平线所成的夹角，过测角仪 D 处作水平线，交

BC 于点 E，可知$\angle CDE$ 即为 52°仰角. 解直角三角形 CDE，即可求得 CE 的长，继而可求得旗杆 BC 的高.

解 从测角仪的 D 处作 $DE/\!/AB$，交 BC 于点 E.

根据题意，可知 $DE=AB=10$ m，$BE=AD=1.5$ m，$\angle CDE=52°$.

在 Rt$\triangle CDE$ 中，由 $\tan\angle CDE=\dfrac{CE}{DE}$，得

$$CE=DE\cdot\tan\angle CDE=10\times\tan 52°\approx 12.80\ (\text{m}).$$

所以 $BC=BE+CE\approx 14.3$ (m).

因此，旗杆 BC 的高约为 14.3 m.

例 6 如图 29-2-4，为了测量河宽，在河的一边沿岸选取 B、C 两点，对岸岸边有一块石头 A. 在$\triangle ABC$ 中，测得$\angle B=49°$，$\angle C=62°$，$BC=33.5$ m，求河宽（结果精确到 0.1 m）.

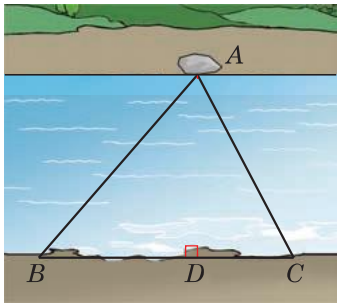


图 29-2-4

分析 由于 A、B、C 三点都在河岸边，因此需要求的河宽即为点 A 到 BC 的距离. 作$\triangle ABC$ 边 BC 上的高 AD，利用 Rt$\triangle ABD$ 和 Rt$\triangle ACD$ 中公共的直角边 AD，解直角三角形即可求出 AD.

解 过点 A 作 $AD\perp BC$，垂足为 D，河宽就是 AD 的长.

在 Rt$\triangle ABD$ 中，由 $\tan B=\dfrac{AD}{BD}$，得 $BD=\dfrac{AD}{\tan B}=\dfrac{AD}{\tan 49°}$.

在 Rt$\triangle ACD$ 中，由 $\tan C=\dfrac{AD}{CD}$，得 $CD=\dfrac{AD}{\tan C}=\dfrac{AD}{\tan 62°}$.

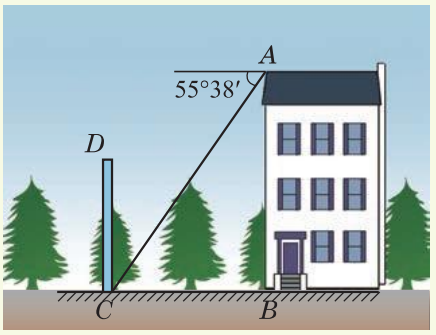
因为 $BD+CD=BC$，所以 $\dfrac{AD}{\tan 49°}+\dfrac{AD}{\tan 62°}=33.5$，解得 $AD\approx 23.9$.

因此，河宽约为 23.9 m.

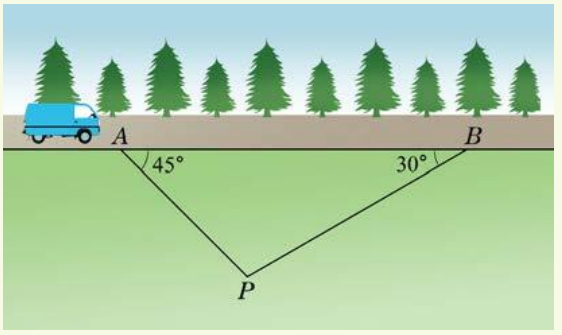
课堂练习 29.2(3)

1. 如图，测绘员在楼顶 A 处测得电线杆 CD 底部 C 的俯角为 $55°38'$，下楼后测得 C 到楼房底部 B(在点 A 的正下方)的距离为 9.65 m. 根据这些数据，求出楼高 AB(结果精确到 0.1 m).

注：在水平线下方的视线与水平线所成的夹角称为俯角.



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 某条道路上通行车辆限速为 60 km/h. 如图，在离道路 50 m 的点 P 处建一个监测点，道路的 AB 段为监测区. 在$\triangle ABP$ 中，已知$\angle A=45°$，$\angle B=30°$. 问：当车辆通过 AB 段的时间在多少秒以内时，就可以认定为超速(结果精确到 1 s)?

例 7 如图 29-2-5，一座大楼前的无障碍通道是斜坡，用 AB 表示，沿着通道走 6.26 m 可进入比楼外地面高 0.5 m 的楼厅. 求无障碍通道的坡度和坡角(角度精确到 $1'$).

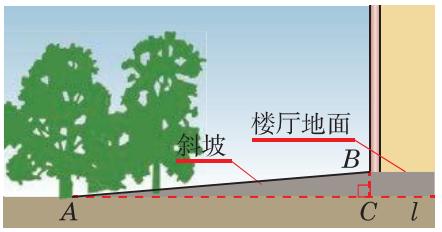


图 29-2-5

分析 “沿着通道走 6.26 m”，指的是图中斜坡 AB 的长；“楼厅比楼外地面高 0.5 m”，指的是图中点 B 到地面 AC 的距离 BC. 而所要求的坡度，指的是斜坡上升的垂直距离 BC 与水平距离 AC 的比(一般表示为 $1:m$ 的形式)；所要求的坡角，指的是斜坡 AB 与地面 AC 的夹角，即$\angle A$.

解 过点 A 作水平线 l，再作 $BC\perp l$，垂足为 C.

根据题意，可知 $AB=6.26$ m，$BC=0.5$ m.

在 Rt$\triangle ABC$ 中，

$\because$ $AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{6.26^2-0.5^2}=6.24$ (m)，

$\therefore$ 坡度$=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{0.5}{6.24}=1:12.48$.

$\because$ $\tan A=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{0.5}{6.24}\approx 0.080\,1$，

$\therefore$ $\angle A\approx 4°35'$.

因此，无障碍通道的坡度为 $1:12.48$，坡角约为 $4°35'$.

例 8 如图 29-2-6，一条细绳系着一个小球在平面上摆动. 已知细绳从悬挂点 O 到球心的长度为 50 cm，小球在左、右两个最高位置 E、F 时，细绳 OE、OF 所成的角为 $80°$. 求小球在最高位置与最低位置 G 的高度差(结果精确到 0.1 cm).

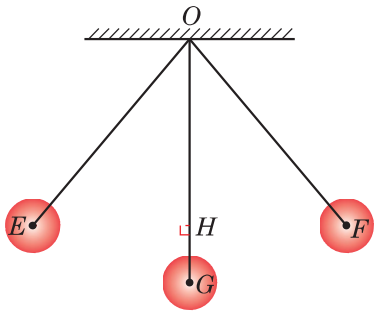


图 29-2-6

解 过点 E 作 $EH\perp OG$，垂足为 H. 小球在最高位置和最低位置的高度差就是 GH 的长. 根据题意，可知

$$\angle EOH=\frac{1}{2}\angle EOF=40°.$$

在 Rt$\triangle EOH$ 中，

$\because$ $\cos\angle EOH=\dfrac{OH}{OE}$，

$\therefore$ $OH=OE\cdot\cos\angle EOH=50\cos 40°$.

$\therefore$ $GH=OG-OH=50-50\cos 40°\approx 11.7$ (cm).

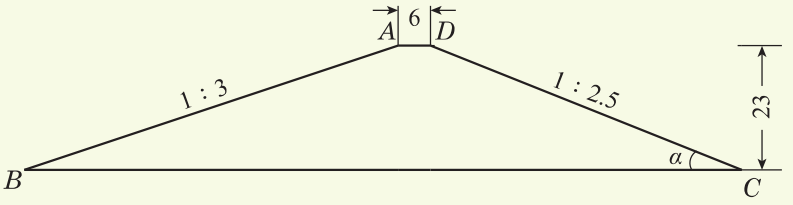
因此，小球在最高位置和最低位置的高度差约为 11.7 cm.

课堂练习 29.2(4)

1. 如图，某水库大坝的横断面是梯形 $ABCD$，坝顶宽 AD 是 6 m，坝高是 23 m，迎水坡 AB 的坡度为 1∶3，背水坡 CD 的坡度为 1∶2.5.

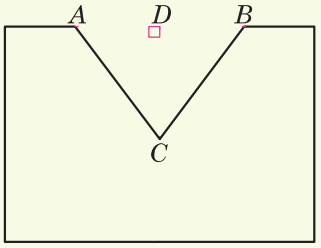
（1）求迎水坡 AB 与坝底 BC 的长度（结果精确到 0.1 m）；

（2）求背水坡 CD 的坡角 α（结果精确到 1°）.

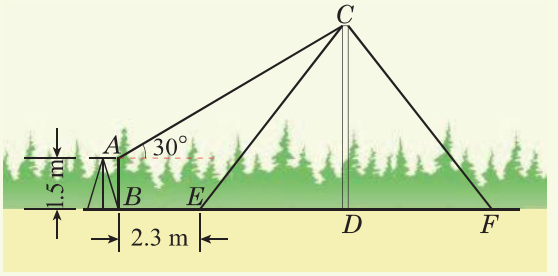


（第 1 题）

2. 如图，工件上有一个 V 形槽，测得它的上口宽 $AB=20$ mm，深 $CD=19.2$ mm，$AC=BC$. 求 V 形角（$\angle ACB$）的大小（结果精确到 1′）.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，在电线杆上的 C 处引拉线 CE 和 CF 固定电线杆. 在离电线杆 6 m 的 B 处安置测角仪（点 B、E、D 在同一直线上），在 A 处测得电线杆上 C 处的仰角为 30°. 已知测角仪的高 AB 为 1.5 m，$BE=2.3$ m. 求拉线 CE 的长（结果精确到 0.1 m）.

习题 29.2

A

1. 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90^\circ$. 分别根据下列条件解直角三角形：

（1）$\angle B=45^\circ$，$a=4$；

（2）$b=4.56$，$c=6.28$（长度保留三位小数，角度精确到 $1'$）.

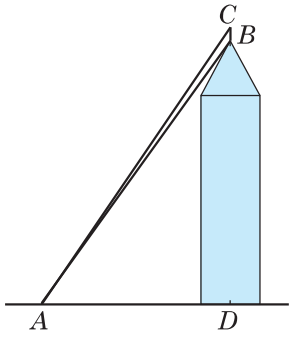
2. 已知△ABC 中，$AB=AC$，$\angle B=56^\circ 24'$，$BC=6.36$.

（1）求 AB 的长（结果保留两位小数）；

（2）求△ABC 的面积（结果保留两位小数）.

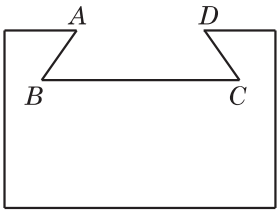
3. 已知△ABC 中，$AB=AC=10$，$\cos B=\frac{4}{5}$. 求△ABC 的面积.

4. 如图，为了测量大楼顶上(居中)避雷针 BC 的长度，在地面上点 A 处测得避雷针底部 B 和顶部 C 的仰角分别为 $55^\circ 58'$和 57°. 已知点 A 与楼底中间部位 D 的距离约为 80 m. 求避雷针 BC 的长度（结果精确到 0.1 m）.

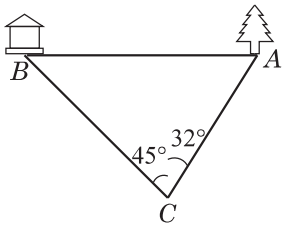


（第 4 题）

5. 如图，燕尾槽的横断面是梯形 $ABCD$，其中燕尾角$\angle B=\angle C=55^\circ$，外口宽 $AD=180$ mm，燕尾槽深度是 70 mm. 求它的里口宽 BC（结果精确到 1 mm）.



（第 5 题）



（第 6 题）

6. 如图，湖心岛上有一凉亭 B，在凉亭 B 的正东湖边有一棵大树 A. 在湖边的 C 处测得 B 在北偏西 45°方向上，测得 A 在北偏东 32°方向上，又测得 A、C 之间的距离为 100 m. 求 A、B 之间的距离（结果精确到 1 m）.

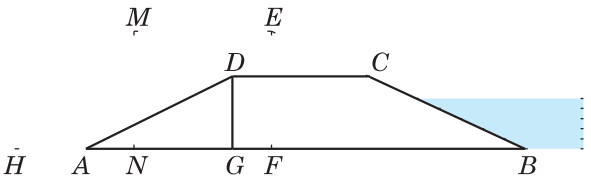
B

7. 已知△ABC 中，$\angle A=57°$，$\angle B=74°$，$AC=10$.

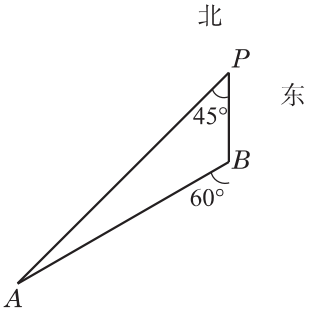
（1）求边 BC 上的高（结果保留一位小数）；

（2）求 BC 的长（结果保留一位小数）.

8. 如图，拦水坝的横断面为梯形 $ABCD$，坝顶宽 DC 为 6 m，坝高 DG 为 3.2 m，迎水坡 BC 的坡角为 $25°38'$. 为了提高拦水坝的能力，需要将水坝加高 2 m，并且保持坝顶宽度、迎水坡 BC 的坡度不变，但是要求背水坡的坡度为 1∶1. 求加高后坝底 HB 的长度（结果精确到 0.1 m）.



（第 8 题）



（第 9 题）

9. 如图，小岛 A 在港口 P 的南偏西 45°方向上，一艘船从港口 P 沿正南方向以每小时 12 海里的速度航行，1 小时 30 分后到达 B 处，在 B 处测得小岛 A 在它的南偏西 60°方向上. 求小岛 A 离港口 P 的距离（结果精确到 0.1 海里）.

◎阅读材料

直角三角形中锐角的正弦、余弦与正切之间的关系

由锐角的正弦、余弦与正切的定义以及勾股定理，可以得到同一个锐角、两个互余锐角的正弦、余弦与正切之间的一些特殊的数量关系.

如图 1，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，由定义可知

$$\sin A=\frac{a}{c},\ \cos A=\frac{b}{c},\ \tan A=\frac{a}{b},$$

$$\sin B=\frac{b}{c},\ \cos B=\frac{a}{c},\ \tan B=\frac{b}{a}.$$

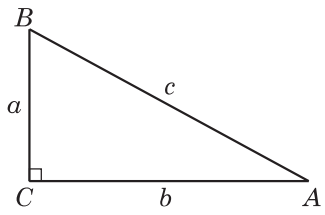


图 1

因此，对于任意给定的锐角 A，它的正弦、余弦与正切之间成立如下关系：

$$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}.$$

另外，由勾股定理可知 $a^2+b^2=c^2$，从而 $\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}=1$. 因此，对任意给定的锐角 A，有 $\sin^2 A+\cos^2 A=1$.

由 $\angle C=90^\circ$，可知 $\angle A$ 与 $\angle B$ 互余，由定义容易发现任意两个互余锐角的正弦、余弦与正切之间成立如下关系：

$$\sin A=\cos B,\ \cos A=\sin B,\ \tan A=\frac{1}{\tan B}.$$

◎内容提要

1. 基本概念：正弦、余弦、正切.

锐角的正弦、余弦与正切定量描述了直角三角形中边与角之间的关系. 直角三角形中的一个锐角可以由两条边的比值唯一确定；反之亦然.

2. 如图 1，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，锐角 A 的正弦、余弦与正切分别定义为：

$$\sin A=\frac{\text{锐角 } A \text{ 的对边}}{\text{斜边}}=\frac{BC}{AB}=\frac{a}{c};$$

$$\cos A=\frac{\text{锐角 } A \text{ 的邻边}}{\text{斜边}}=\frac{AC}{AB}=\frac{b}{c};$$

$$\tan A=\frac{\text{锐角 } A \text{ 的对边}}{\text{锐角 } A \text{ 的邻边}}=\frac{BC}{AC}=\frac{a}{b}.$$

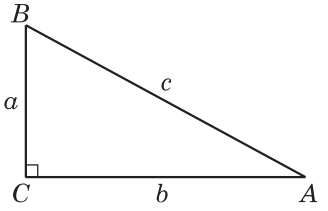


图 1

3. 已知直角三角形的两条边或者一条边及一个锐角，就可以求出该直角三角形中未知的其他边和角.

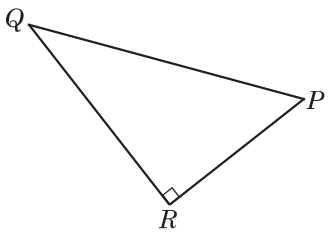
◎复习题

A

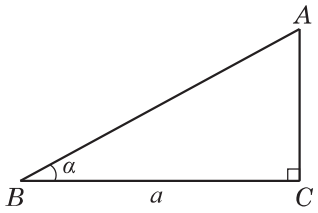
1. 如图，在△PQR 中，$\angle R=90^\circ$.

（1）$\dfrac{QR}{PR}=$_____$=$_____（用含正弦、余弦或正切的表达式表示）；

（2）$\dfrac{PR}{PQ}=$_____$=$_____（用含正弦、余弦或正切的表达式表示）.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，已知△ABC 中，$\angle C=90^\circ$，$\angle B=\alpha$，$BC=a$.

（1）用含 α 和 a 的表达式表示 AC（用两种方法）；

（2）用含 α 和 a 的表达式表示 AB.

3. 求下列各式的值：

（1）$\tan^2 60^\circ-\dfrac{\cos 45^\circ}{\tan 45^\circ+\sin 45^\circ}$；　（2）$\sqrt{\cos^2 30^\circ-\sin^2 30^\circ}+\dfrac{\sin 60^\circ}{\tan 60^\circ}$.

4. 已知△ABC 中，$\angle C=90^\circ$，分别根据下列条件解直角三角形：

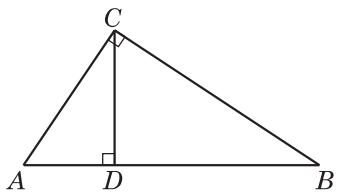
（1）$\angle A=30^\circ$，$b=3$；

（2）$a=3.245$，$c=4.876$（长度保留三位小数，角度精确到 $1'$）.

5. 如图，已知△ABC 中，$\angle ACB=90^\circ$，$CD\perp AB$，垂足为 D，$CD=4$，$\cos A=\dfrac{3}{5}$.

（1）求 AC 的长；

（2）求 $\tan B$.



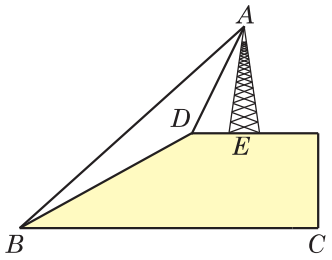
（第 5 题）

6. 已知△ABC 中，$AB=AC$，$BC=10$，△ABC 的面积 $S_{\triangle ABC}=60$.

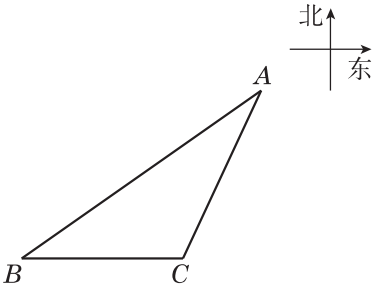
（1）求 AB 的长；

（2）求$\angle A$（结果精确到 $1'$）.

7. 如图，小山的顶部是一块平地，在这块平地上有一高压输电线的铁架. 小山斜坡 BD 的坡度为 1∶1.8，坡长为 50 m. 在山坡的坡底 B 处测得铁架顶端 A 的仰角为 42°，在山坡的坡顶 D 处测得铁架顶端 A 的仰角为 64°. 求铁架的高度 AE（结果精确到 0.1 m）.



（第 7 题）



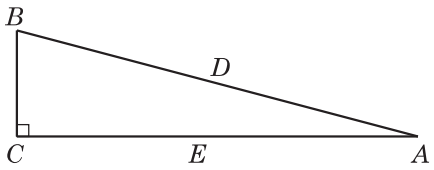
（第 8 题）

8. 如图，海中有一个小岛 A，该岛四周 10 海里范围内有暗礁. 有一货轮在海面上由西向东航行，到达 B 处时它在小岛南偏西 55°方向上，再往东行驶 20 海里后到达小岛的南偏西 25°方向上的 C 处. 如果货轮继续向东航行，是否会有触礁的危险？

B

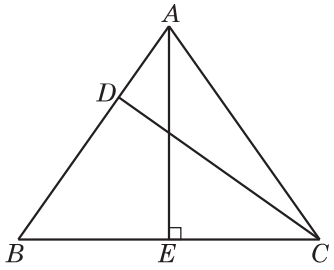
9. 已知 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$\tan A=\frac{4}{3}$. 能否求出 $\sin A$ 和 $\cos A$？

10. 小海试图通过几何的方法来求 15°的正弦、余弦和正切值. 他先考虑一个含 15°角的直角三角形（如图，在△ABC 中，$\angle C=90°$，$\angle A=15°$），然后作斜边 AB 的垂直平分线（与边 AB、AC 分别交于点 D、E），最后连接 BE. 你能借助小海的构图来求出 15°角的正弦、余弦和正切值吗？

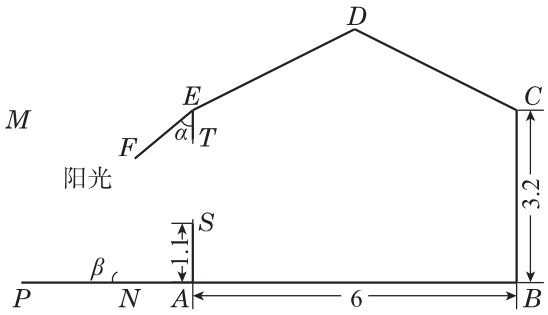


（第 10 题）

11. 如图，D 是$\triangle ABC$ 的边 AB 上的点，AE 是边 BC 上的高，已知 $BD=2AD$，$BE=3\sqrt{2}$，$CD=4\sqrt{3}$，$\tan\angle BCD=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 求$\triangle ABC$ 的面积.



（第 11 题）



（第 12 题）

12. 李叔叔家房屋的纵截面如图所示，其中线段 AB 为屋内地面，线段 AE、BC 为房屋两侧的墙，线段 CD、DE 为屋顶的斜坡. 已知 $AB=6$ m，$AE=BC=3.2$ m，斜坡 CD、DE 的坡度均为 $1:2$.

（1）求屋顶点 D 到地面 AB 的距离；

（2）已知在墙 AE 距离地面 1.1 m 处装有窗 ST. 当阳光与地面的夹角 $\angle MNP=\beta=53°$时，为了防止阳光通过窗 ST 照射到屋内，李叔叔请门窗公司在墙 AE 的端点 E 处安装了一个旋转式遮阳棚（如图中线段 EF）. 公司设计的遮阳棚可作 90°旋转，即 $0°\leqslant\angle FET=\alpha\leqslant 90°$，长度为 1.4 m，即 $EF=1.4$ m. 试判断遮阳棚是否能达到要求，并说明理由.



第 30 章

投影与视图

三视图是表达立体图形的标准而重要的方式，是工程领域通用的技术语言．工程技术人员常借助三视图还原立体图形的信息．

本章我们将学习中心投影、平行投影和三视图，从不同角度观察包括直棱柱、圆柱、圆锥和球等在内的简单立体图形，体会立体图形与平面图形的对应关系，提升空间思维与想象能力，为高中学习立体几何打下基础．

30.1 投影

在日常生活中，我们经常可以观察到各种不同的影子. 如图 30-1-1，当路灯照在人身上时，会形成人的影子；当灯光照在手上时，会产生手的影子；当太阳光照在窗框上时，会形成窗的影子；当太阳光照在树上时，会留下树的影子.



图 30-1-1

1. 中心投影

当光线照射到空间物体上时，物体在平面上形成的影子既取决于物体的形状，也受到光线照射方式的影响.

通常情况下，当光线照射到物体上时，物体在一些平面上会投下影子，我们称之为物体的投影. 而照射到物体上的光线则称为投影线，投影所在的平面称为投影面.

如图 30-1-1，人影和手影是指在灯光照射下，人和手在地面或墙面上形成的投影. 在这种情况下，灯光的光线是投影线，而地面或墙面则是投影面. 类似地，窗影和树影是指在太阳光照射下，窗和树在地面或墙面上形成的投影. 在这种情况下，太阳光线是投影线，而地面或墙面仍然是投影面.

如图 30-1-1，路灯照到人身上在地面留下人影、灯光照到手上在墙面留

下手影等，照射这些物体的光线都是从一点发出的.

我们将由同一点光源(如灯泡)发出的光线形成的投影叫作**中心投影**，点光源叫作**投影中心**. 如图 30-1-2，物体在点光源发出的光照射下形成的影子就是中心投影.

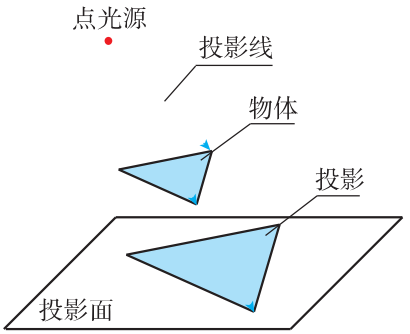


图 30-1-2

观察

如图 30-1-3，在中心投影下，点 O 是投影中心，箭头的方向表示投影线的方向，四边形表示投影面. 现把一个笔直的细木棒(记为线段 AB)放在平行于投影面的位置，线段 AB 的中心投影是什么形状的图形?

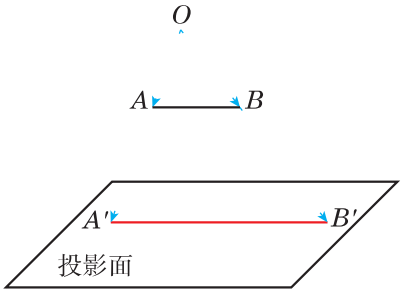


图 30-1-3

如图 30-1-3，通过观察、测量可知：当线段 AB 平行于投影面时，线段 AB 的中心投影是线段 $A'B'$，此时 $AB \parallel A'B'$，所以 $\triangle OAB \backsim \triangle OA'B'$，线段 $A'B'$ 是线段 AB 放大后的图形.

探究

如果“观察”中的线段 AB 不平行于投影面，且两个端点不在同一条投影线上. 线段 AB 的中心投影是什么形状的图形？

如图 30-1-4，当线段 AB 不平行于投影面，且两个端点不在同一条投影线上时，点A、B 的中心投影分别是点 A'、B'，此时线段 AB 的中心投影是线段$A'B'$，它的长度可能等于 AB，也可能不等于 AB. 如果改变线段 AB 与投影面所成的角度，线段 AB 的投影$A'B'$的长度也会发生变化.

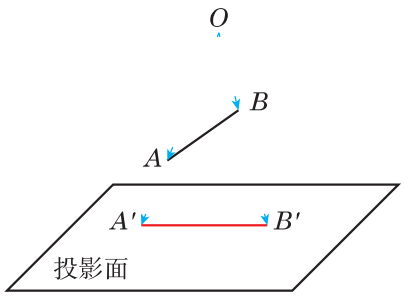


图 30-1-4

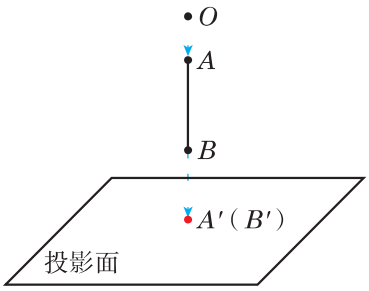


图 30-1-5

当线段 AB 的两个端点在同一条投影线上时，点 A、B 的中心投影 A'、B'重合，此时线段 AB 的中心投影是一个点，如图 30-1-5 所示.

观察

如图 30-1-6，在中心投影下，点 O 是投影中心，箭头的方向表示投影线的方向，四边形表示投影面. 现把一块三角形硬纸片（记为 $\triangle ABC$）放在平行于投影面的位置. 观察 $\triangle ABC$ 的中心投影的形状，由此，你能发现什么结论？

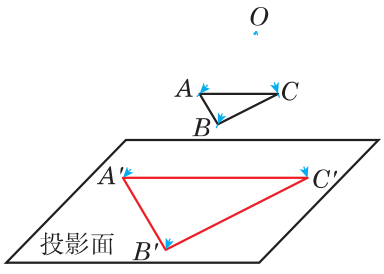


图 30-1-6

如图 30-1-6，通过观察、测量可知：当$\triangle ABC$与投影面平行时，$\triangle ABC$的中心投影也是一个三角形，不妨记为$\triangle A'B'C'$，此时$\triangle A'B'C'$是$\triangle ABC$放大后的图形，$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$是相似的.

一般地，在中心投影下，当一个平面图形与投影面平行时，这个平面图形的中心投影与原平面图形是相似的.

在日常生活中，我们可以利用中心投影的原理来实现图形的放大效果. 通过调整光源到被投影图形的距离，或者调整图形到投影面的距离，我们可以按照需求在投影面上得到放大后的图形. 这就是幻灯机和投影仪的工作原理. 通过调整距离，光线经过适当的聚焦和扩散，将原本较小的图形投影到屏幕上，实现了图像的放大显示.

例 1 如图 30-1-7，已知 AB、CD、EF 是三根竖立在水平地面上的木桩，且点 B、D、F 在同一直线上. 木桩 AB、CD 在路灯下的影子分别为 BM、DN. 在图中画出木桩 EF 在路灯下的影子 FG.

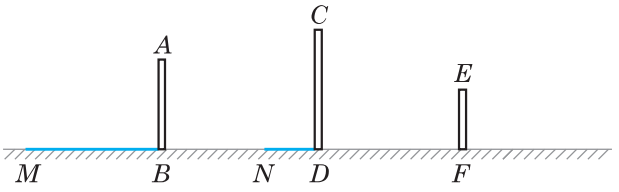


图 30-1-7

解 如图 30-1-8，连接 MA、NC 并延长，交于点 Q，则 Q 为点光源. 连接 QE 并延长，交水平线 BF 于点 G，连接 FG. 于是 FG 为木桩 EF 在路灯下的影子.

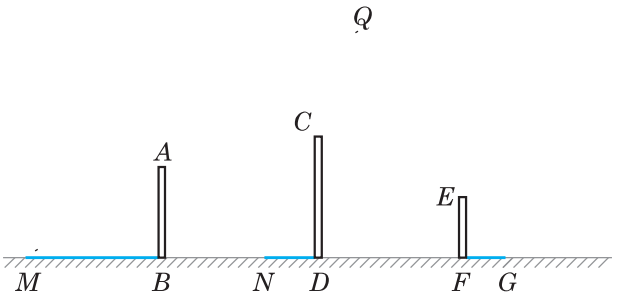


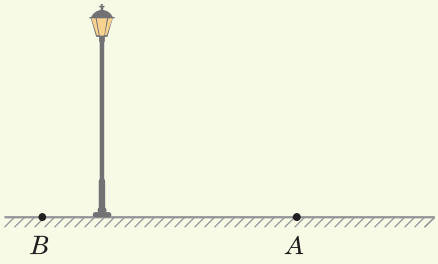
图 30-1-8

课堂练习 30.1(1)

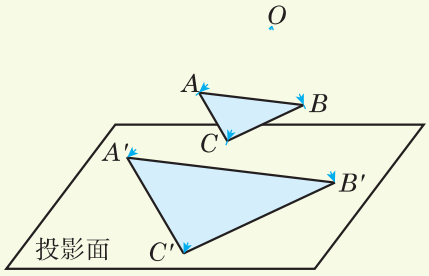
1. 晚上一位行人在路灯下散步. 如图，在从 A 处直线行走到 B 处的过程中，他的影子 （　　）

A. 逐渐变短；　　B. 逐渐变长；

C. 先变短后变长；　　D. 先变长后变短.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，已知一块直角三角形硬纸片 ABC 与投影面平行，$\angle ACB=90^\circ$，$BC=12$ cm，$AC=8$ cm，测得边 BC 的中心投影 $B'C'$ 的长为 24 cm. 求 $A'B'$ 的长.

2. 平行投影

如图 30-1-9，由平行的投影线所形成的投影叫作**平行投影**.

由于太阳与地球之间的距离非常遥远，所以太阳光在到达地面时可以近似看作是平行的射线. 因此，太阳光照射在窗框上形成的窗影和照射在树上形成的树影都可以看作是平行投影.

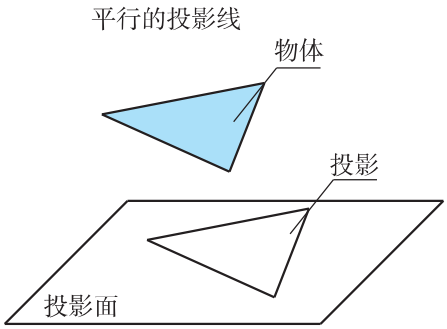


图 30-1-9

在我国古代，天文学家利用日晷来测定时间. 北京故宫中的日晷，也称为

“日规”(图 30-1-10)，就是利用被太阳照射到的物体投下的影子的长度和方向来观测时间的一种工具.



图 30-1-10



图 30-1-11

如图 30-1-11，探照灯的光线形成的投影也是平行投影，它使得探照灯可以将光线照射得更远.

观察

如图 30-1-12，在平行投影下，箭头的方向表示投影线的方向，四边形表示投影面. 现把一根笔直的细木棒(记为线段 AB)放在平行于投影面的位置，线段 AB 的平行投影是什么图形?

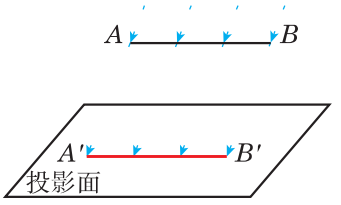


图 30-1-12

如图 30-1-12，通过观察、测量可知：当线段 AB 平行于投影面时，它的平行投影是一条线段 $A'B'$，此时四边形 $AA'B'B$ 是一个平行四边形，所以 $A'B'=AB$.

探究

如果“观察”中线段 AB 不平行于投影面且不平行于投影线，或者线段 AB 的两个端点在同一条投影线上，在这两种情形下，线段 AB 的平行投影各是什么形状的图形?

如图 30-1-13(1)，当线段 AB 不平行于投影面且不平行于投影线时，它

的平行投影是一条线段 $A'B'$，此时线段$A'B'$与AB 不平行，线段 $A'B'$的长度可能等于线段AB，也可能不等于线段 AB，它们之间的大小关系和线段 AB 与投影面、投影线之间的相对位置有关.

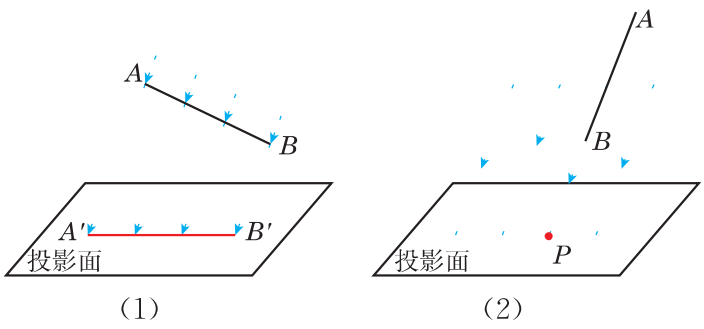


图 30-1-13

如图 30-1-13(2)，当线段 AB 的两个端点在同一条投影线上时，它的平行投影是一个点 P.

观察

如图 30-1-14，在平行投影下，箭头的方向表示投影线的方向，四边形表示投影面. 现把一块矩形硬纸片(记为矩形 $ABCD$)放在平行于投影面的位置. 矩形 $ABCD$ 的平行投影是什么形状的图形?

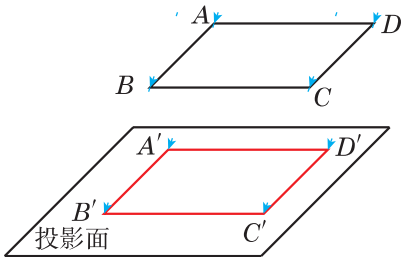


图 30-1-14

如图 30-1-14，通过观察、测量可知：当矩形 $ABCD$ 平行于投影面时，它的平行投影是矩形 $A'B'C'D'$，它们的形状相同、大小相等.

例 2 如图 30-1-15，在平行投影下，箭头的方向表示投影线的方向，四边形表示投影面. 当三角形硬纸片（记为△ABC）平行于投影面时，画出△ABC 在投影面上的平行投影.

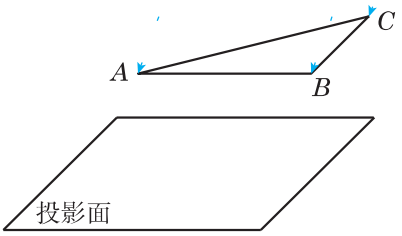


图 30-1-15

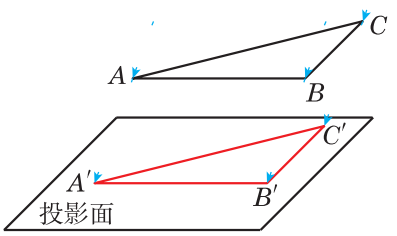


图 30-1-16

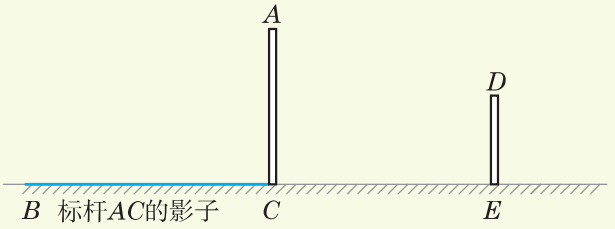
解 如图 30-1-16，△$A'B'C'$是△ABC 的平行投影.

一般情况下，当一个平面图形与投影面平行时，所得的平行投影与原平面图形是全等的.

课堂练习 30.1(2)

1. 你能举出生活中平行投影的例子吗？

2. 如图，标杆 AC 竖立在水平地面上，并在太阳光下形成了一个影子 BC. 在图中画出太阳光线，并画出此时标杆 DE 的投影.



（第 2 题）

习题 30.1

A

1. 选择题：

（1）下列物体的光线所形成的投影是平行投影的为（　　）

A. 壁灯；　　B. 手电筒；　　C. 太阳；　　D. 吸顶灯.

（2）下列关于投影的说法中，不正确的是（　　）

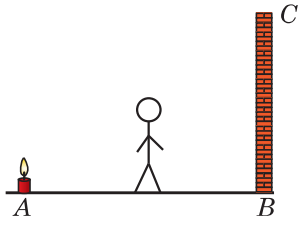
A. 正午时，东方明珠广播电视塔在地面上的投影是平行投影；

B. 当匡衡凿壁借光学习时，穿过洞的光线投射到地面上形成的投影是中心投影；

C. 三角形木板的平行投影可以是一个点；

D. 黑夜时，一个人向路灯走去，他的影子越来越短.

（3）如图，地面 A 处有一支燃烧的蜡烛（长度不计），一个人在蜡烛与墙 BC 之间走动，当他离墙的距离变小时，他在墙上的投影长度（　　）



〔第 1(3)题〕

A. 变大；　　B. 变小；

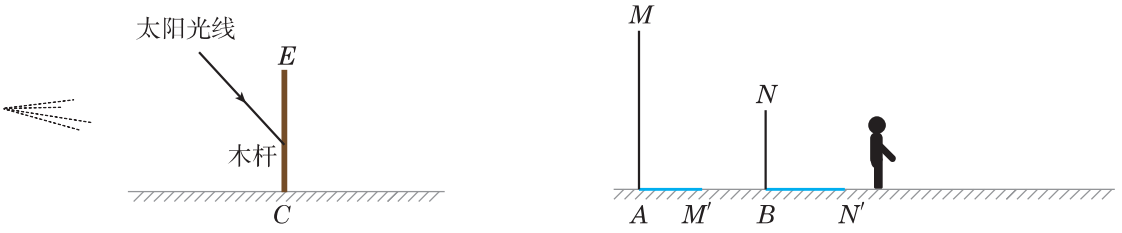
C. 不变；　　D. 不能确定.

2. 在灯光下，如果甲、乙两人的影子长度相等，那么能说明他们身高相等吗？为什么？

3. 解答下列问题：

（1）一根木杆 CE 按如图(1)所示的方式竖立在水平地面上，请在图中画出它在太阳光下的投影（用线段 CD 表示）；

（2）如图(2)所示，线段 AM'、BN' 是两根竖立在水平地面上的木杆 AM、BN 分别在路灯下的投影. 木杆 AM、BN 与人在同一平面上，请在图中画出路灯光源的位置（用点 P 表示），并在图中画出此时人在路灯下的投影（用线段 EF 表示）.



（1）　　（2）

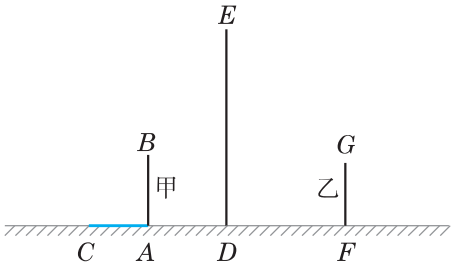
（第 3 题）

B

4. 如图，在路灯下，甲的身高用线段 AB 表示，他在地面上的影子用线段 AC 表示；乙的身高用线段 FG 表示，路灯灯泡在线段 DE 上．点 A、D、F 在同一直线上．

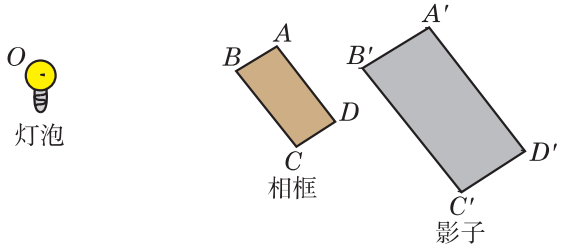
（1）请在图中确定灯泡所在的位置，并画出此时乙在灯光下的影子；

（2）如果甲的身高 $AB=1.8$ m，他的影子长 $AC=1.5$ m，且灯泡到地面的距离为 4.2 m，求他到路灯的距离 AD．



（第 4 题）

5. 如图，欢欢用灯泡 O 照射一个与墙面平行的矩形相框 $ABCD$，在墙上形成矩形影子 $A'B'C'D'$．现测得 $OA=30$ cm，$OA'=50$ cm，$AB=6$ cm，相框 $ABCD$ 的面积为 72 cm^2．求影子 $A'B'C'D'$ 的长和宽．



（第 5 题）

30.2 三视图

在平行投影中，当投影线垂直地照射到投影面上时，我们称之为投影线垂直于投影面. 像图 30-2-1 这样，投影线垂直于投影面产生的投影叫作**正投影**. 正投影是一种特殊的平行投影，这种方式绘制图纸相对更加便捷. 因此，在工程领域一般采用正投影的方式来绘制图纸.

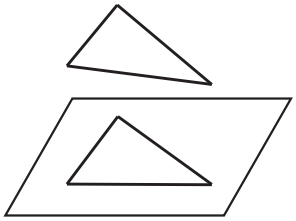
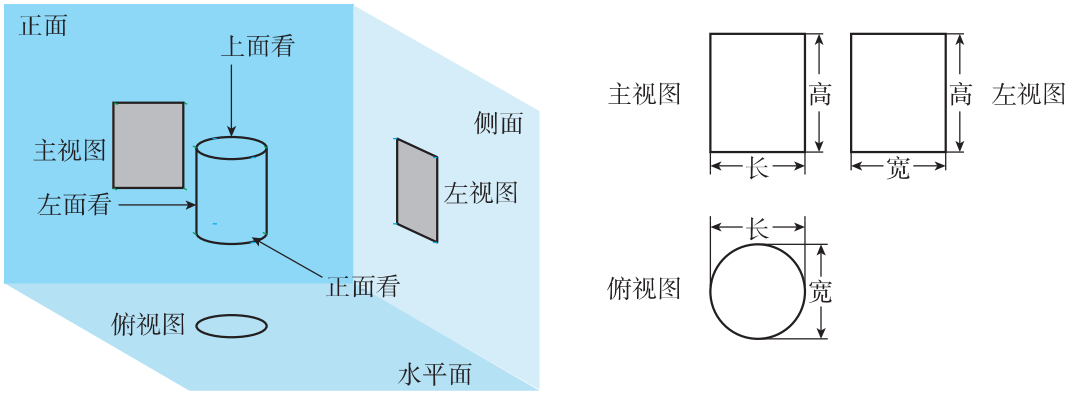


图 30-2-1

由于视线可以代替投影线，因此使用正投影方法绘制物体在投影面上的图形通常称为物体的视图.

一个视图只能反映物体在某个方向上的形状，不能完整地反映物体的整体结构. 在工程领域，通常使用三个相互垂直的平面作为投影面，得到相应的三个视图. 如图 30-2-2(1)所示，其中正对我们的平面称为正面，下方的平面称为水平面，右边的平面称为侧面. 通过在这三个投影面上对物体进行正投影，我们可以得到主视图、俯视图和左视图. **主视图**是从前向后观察物体时在正面上得到的视图，**俯视图**是从上向下观察物体时在水平面上得到的视图，**左视图**是从左向右观察物体时在侧面上得到的视图. 主视图、俯视图和左视图统称为**三视图**. 三视图是能够正确地反映物体在长、宽和高方面的正投影图.



(1)　　(2)

图 30-2-2

如图 30-2-2(2)所示，如果将三个相互垂直的平面展开到同一平面上，即保持正面不动，将侧面向右旋转 90°，水平面向下旋转 90°，就可以得到物体的三视图，包括主视图、俯视图和左视图. 这三个视图从不同的方向记录了物体的形状，合在一起能够更全面地反映物体的形状.

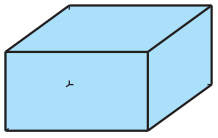
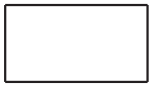
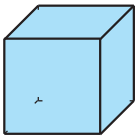
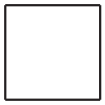
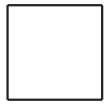
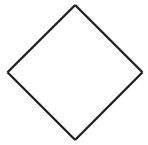
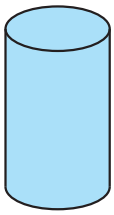
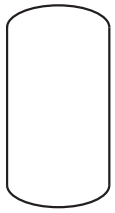
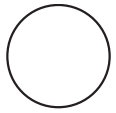
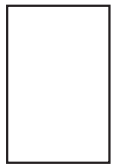
正对着物体看，物体左右之间的水平距离称为长，前后之间的水平距离称为宽，上下之间的竖直距离称为高.

在三视图中，三个视图的大小是相互关联的. 主视图与俯视图可以显示同一个物体的长，主视图与左视图可以显示同一个物体的高，左视图与俯视图可以显示同一个物体的宽.

讨论

表 30-1 中所示立体图形的主视图、俯视图和左视图正确吗？为什么？

表 30-1

立体图形	主视图	俯视图	左视图
 长方体			
 正方体			
 圆柱			

在画一个立体图形的三视图时，通常我们首先选择一个主视角方向，画出

它的主视图，再将俯视图画在主视图的下方，并将左视图画在主视图的右侧.

当观察一个物体时，某些部分可能因被遮挡而看不见，为了完整描绘立体图形的形状，在画三视图时，我们通常将可见的轮廓线画成实线（或点），而将被遮挡、无法看见的轮廓线画成虚线.

例 1 如图 30-2-3，已知一个底面是一个正方形的长方体，画出它的三视图.

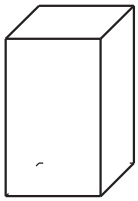


图 30-2-3

分析 在画长方体的三视图时，要注意从三个方向观察. 如图 30-2-4，具体方法是：

（1）确定主视图的位置，画出主视图；

（2）在主视图正下方画出俯视图；

（3）在主视图正右方画出左视图.

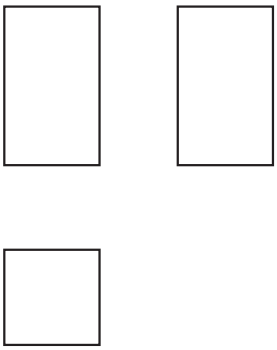


图 30-2-4

主视图反映物体的长和高；
俯视图反映物体的长和宽；
左视图反映物体的宽和高.

解 这个长方体的三视图如图 30-2-5 所示.

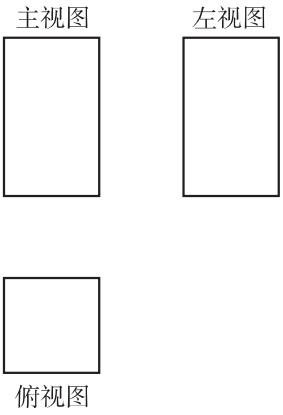


图 30-2-5

完成三视图后，可以擦去辅助线.

观察

如图 30-2-6，这些立体图形具有什么共同的特征？

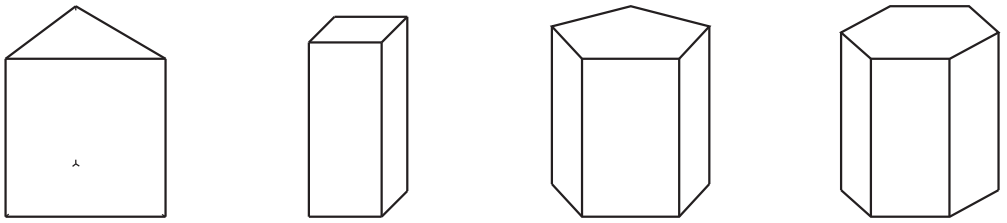


图 30-2-6

我们观察到这些立体图形是由几个多边形围成的封闭的几何体. 这些立体图形具有以下特征：

（1）其中有两个全等的多边形，它们所在的平面是平行的，即它们不会相交；

（2）其余的多边形都是矩形.

像这样的立体图形叫作**直棱柱**. 如图 30-2-7，在直棱柱中，各个多边形叫作直棱柱的面，各相邻面的公共边叫作直棱柱的**棱**，多边形的顶点叫作直棱柱的**顶点**；那一对全等且所在的平面互相平行的面叫作直棱柱的**底面**；其余的各个面都是矩形，这些面叫作直棱柱的**侧面**；相邻两个侧面的公共边叫作直棱柱的**侧棱**.

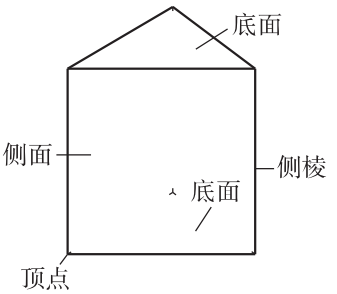


图 30-2-7

底面是三角形、四边形……的直棱柱分别称为直三棱柱、直四棱柱……. 因此，图 30-2-6 中的立体图形分别称为直三棱柱、直四棱柱、直五棱柱和直六棱柱.

长方体和正方体都是直四棱柱.

例 2 如图 30-2-8，已知一个底面是等边三角形的直三棱柱，画出它的三视图.

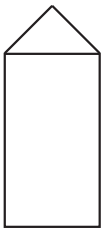


图 30-2-8

分析 按照步骤画图 30-2-9.

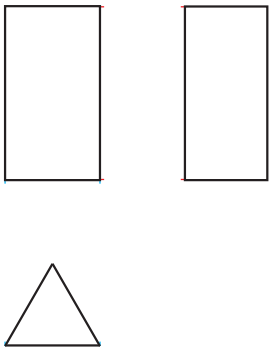


图 30-2-9

左视图中矩形的各边长如何确定?

解　这个直三棱柱的三视图如图 30-2-10 所示.

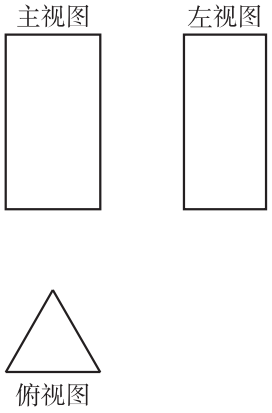
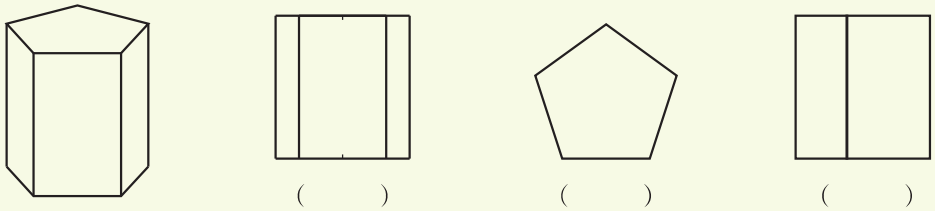


图 30-2-10

看不见的轮廓线通常画成虚线.

课堂练习 30.2(1)

1. 如图，把图(1)所示物体的主视图、俯视图、左视图的名称填在图(2)相应的括号内.

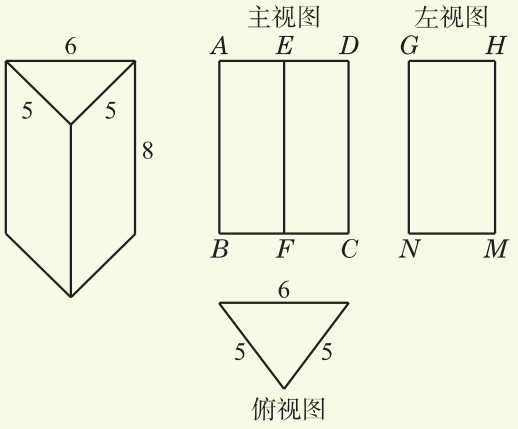


(1)　　(2)

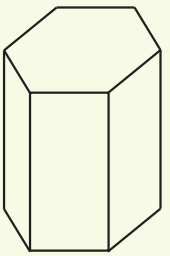
(第 1 题)

2. 如图，已知一个直三棱柱和它的三视图，根据图中标注的数据，确定下列线段的长：

（1）BC 和 EF；　　（2）BF 和 MN.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，已知一个侧棱长 2 cm 的直六棱柱. 它的底面边长均为 1 cm 且内角均相等. 画出它的三视图.

在日常生活和生产实践中，人们常常会遇到各种不同形状的物体. 尽管这些物体的形态各异，但通常都是由基本的立体图形，如柱体、锥体、球等组合而成的. 因此，了解如何观察和画立体图形的视图是非常必要的. 同时，这些视图也是工程、机械等领域中制图和识图的基础. 前面，我们已经讨论了直棱柱的三视图，接下来，让我们来探讨如何画圆柱、圆锥和球的三视图.

例 3　如图 30-2-11，已知一个圆柱和一个球，说出它们在正面、水平面和侧面上的正投影的形状，并画出它们的三视图.

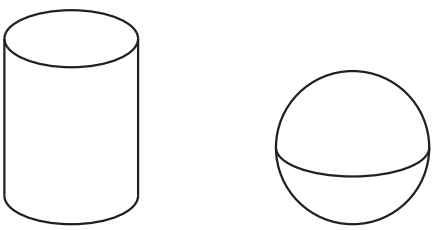
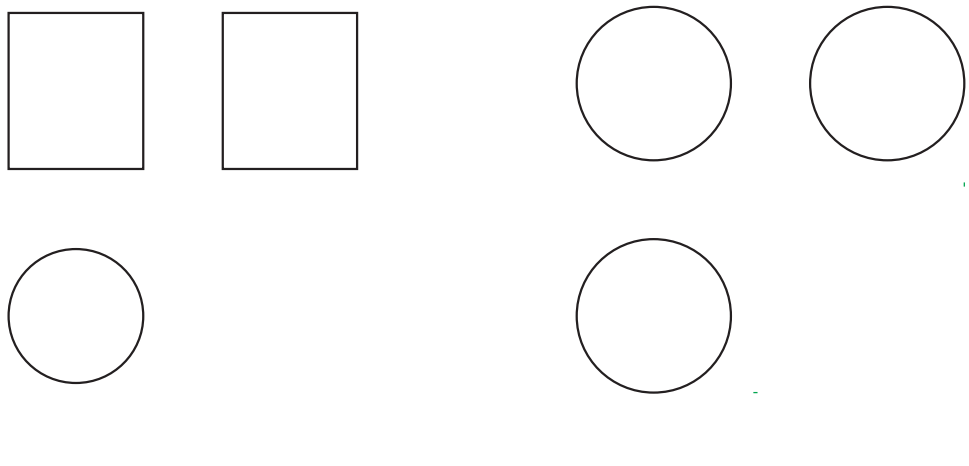


图 30-2-11

分析　想象出圆柱和球在正面、水平面和侧面上的正投影，并按步骤画图 30-2-12.



(1)　　(2)

图 30-2-12

解　圆柱在正面上的正投影是一个矩形，在水平面上的正投影是一个圆，在侧面上的正投影也是一个矩形，其三视图如图 30-2-13 所示；球在正面上的正投影是一个圆，在水平面上的正投影也是一个圆，在侧面上的正投影同样是一个圆，其三视图如图 30-2-14 所示.

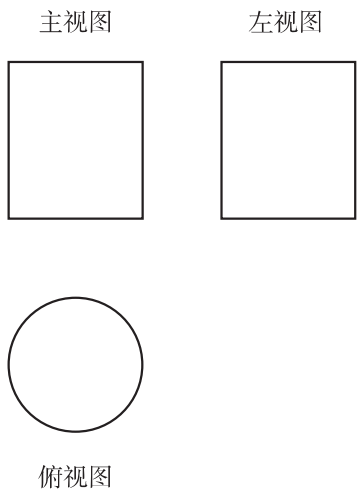


图 30-2-13

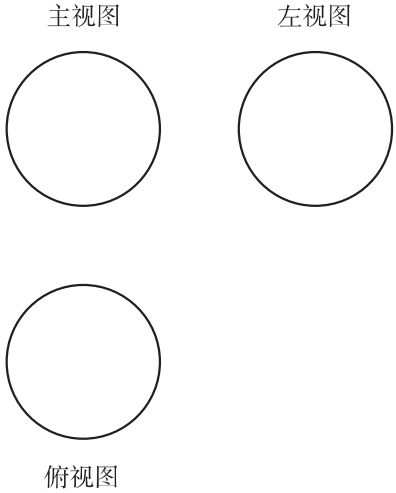


图 30-2-14

需要注意的是，同一个物体在以不同的方式摆放时可能会有不同的三视图. 如果将例 3 中的圆柱如图 30-2-15 所示摆放，那么其三视图如图 30-2-16 所示.

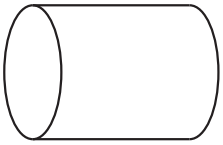


图 30-2-15

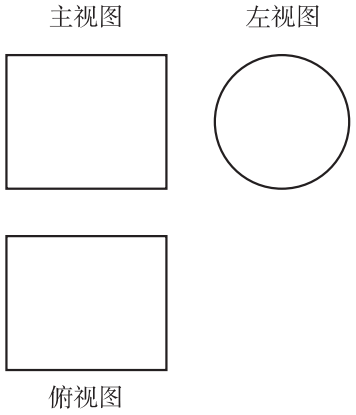


图 30-2-16

例 4 如图 30-2-17，已知一个圆锥形纸杯，画出它的三视图.



图 30-2-17

解 这个圆锥形纸杯的三视图如图 30-2-18 所示.

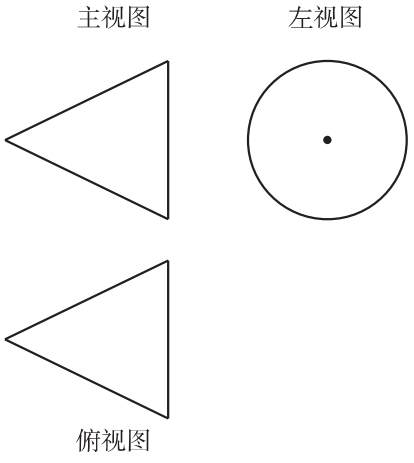


图 30-2-18

探究

如图 30-2-19(1)，这是一个积木玩具，它的上半部分是圆锥，下半部分是正方体，且圆锥底面的直径与正方体的棱长相等. 已知它的主视图如图 30-2-19(2)所示，请补全它的三视图.

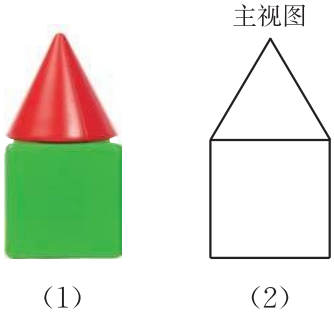


图 30-2-19

这个积木玩具的三视图如图 30-2-20 所示.

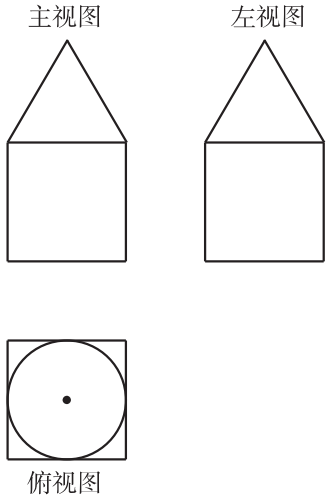
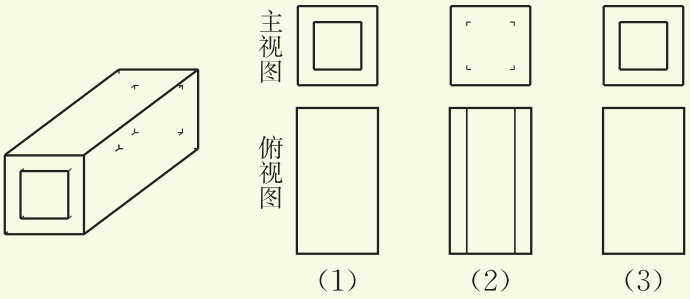


图 30-2-20

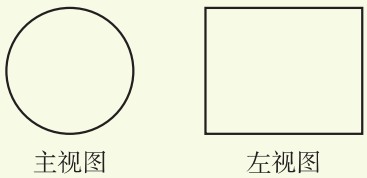
课堂练习 30.2(2)

1. 如图是一个空心长方体的几种视图，哪些有错误？为什么？



(第 1 题)

2. 一个圆柱的主视图和左视图如图所示，画出它的俯视图.



(第 2 题)

我们之前讨论了如何根据一个立体图形(实物)来画其三视图. 现在我们要探讨如何根据三视图来想象出一个立体图形(实物).

若无特别说明，本章中所讨论的立体图形(实物)仅限于直棱柱、圆柱、圆锥和球.

观察

已知一个立体图形的三视图如图 30-2-21 所示，你能在图 30-2-22 中找出与之匹配的立体图形吗?

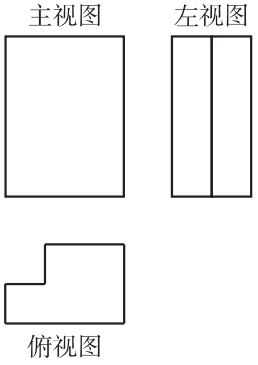


图 30-2-21

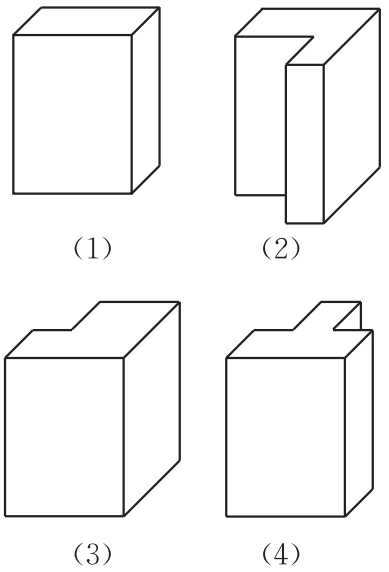


图 30-2-22

例 5 如图 30-2-23，根据三视图(1)(2)，分别描述相应的立体图形的形状.

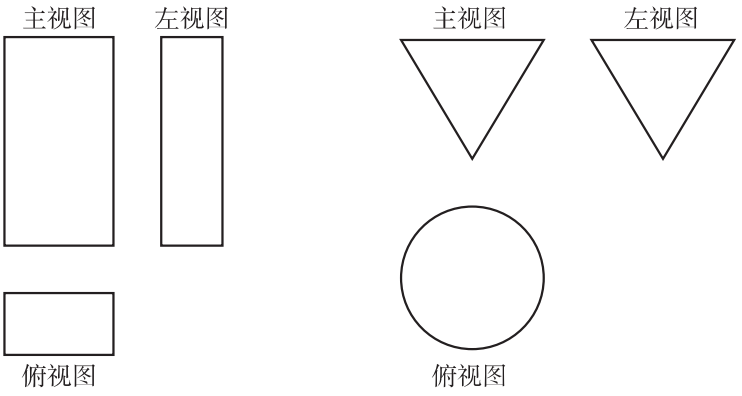
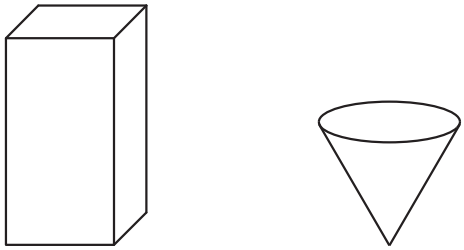


图 30-2-23

分析 通过三视图来想象一个立体图形时，首先需要根据主视图、俯视图和左视图分别想象立体图形的前面、上面和左侧面；然后，需要综合考虑这些视图，想象整体的立体图形.

解 (1) 从三个方向观察立体图形，可以观察到它在每个方向上的视图都是矩形. 基于这一特征，可以推测这个立体图形是一个长方体，如图 30-2-24(1)所示.

(2) 从前面、侧面观察立体图形的视图均为等腰三角形，从上面观察立体图形的视图为圆形，且不含圆心，则可以推测这个立体图形是一个圆锥，如图 30-2-24(2)所示.



(1) (2)

图 30-2-24

例 6 已知一个立体图形的三视图如图 30-2-25 所示，请描述该立体图形的形状.

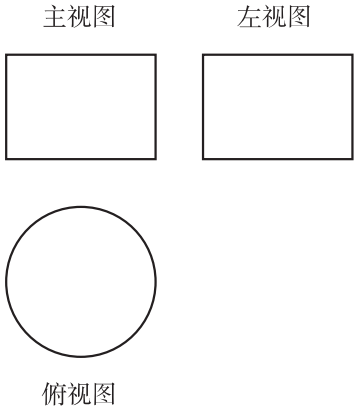


图 30-2-25

分析 根据主视图，可以看到该立体图形的前面是一个矩形. 根据俯视图，可以看到该立体图形的上面是一个圆. 根据左视图，可以看到该立体图形的左侧面是一个矩形. 综合以上各视图的信息，可以得出结论：该立体图形是

一个圆柱.

解　该立体图形是圆柱，如图 30-2-26 所示.

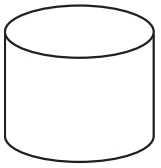


图 30-2-26

思考

已知一个立体图形的三视图如图 30-2-27 所示，你能描述该立体图形的形状吗?

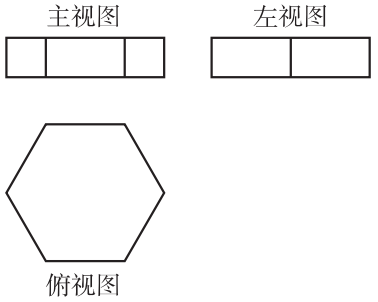
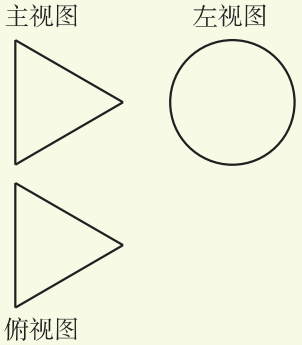


图 30-2-27

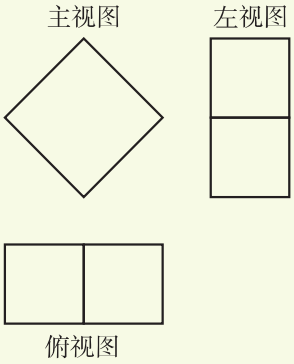
课堂练习 30.2(3)

1. 已知一个立体图形的三视图如图所示，请描述该立体图形的形状.



(第 1 题)

2. 已知一个立体图形的三视图如图所示，请描述该立体图形的形状.



（第 2 题）

30.3 立体模型的制作

我们了解到，有些立体图形，比如直棱柱，可以沿着某些线(如棱线)剪开，将立体图形的表面展开成一个平面图形，这个平面图形称为该立体图形的平面展开图. 在实际生产中，三视图和平面展开图通常结合使用，通过它们可以制作出一个立体图形的模型.

例 1 如图 30-3-1，已知一个三棱镜包装盒(有盒盖)的三视图(图中单位：mm)，请根据三视图确定制作这个包装盒所需材料的面积(结果精确到 1 mm^2).

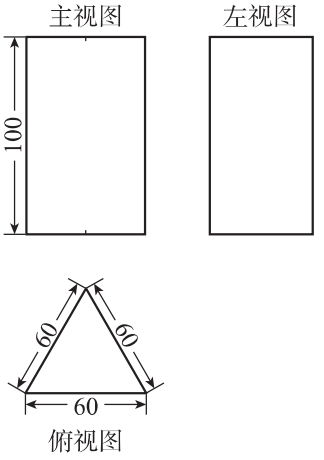


图 30-3-1

分析 先由三视图想象出该包装盒的形状，再进一步画出其平面展开图，然后计算面积.

解 由三视图可知，该包装盒的形状是底面为等边三角形的直三棱柱(图 30-3-2)，包装盒的高为 100 mm，底面等边三角形的边长为 60 mm，图 30-3-3 是它的平面展开图.

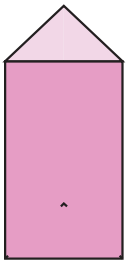


图 30-3-2

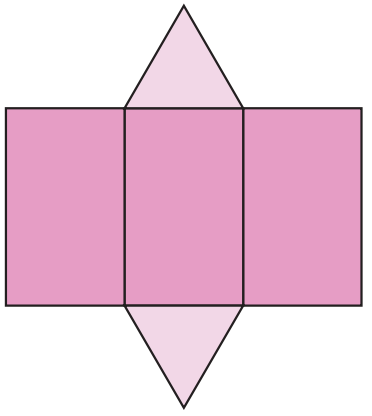


图 30-3-3

由平面展开图可知，制作这个包装盒所需材料的面积为

$$3\times60\times100+2\times\frac{1}{2}\times60\times(60\times\sin 60^\circ)=18\,000+1\,800\sqrt{3}\approx21\,118\ (mm^2).$$

因此，所需材料的面积约为 21 118 mm^2.

例 2 已知一个立体图形的三视图如图 30-3-4 所示(图中单位：cm).

(1) 描述该立体图形的形状；

(2) 画出该立体图形平面展开图的示意图；

(3) 用硬卡纸制作该立体图形的模型.

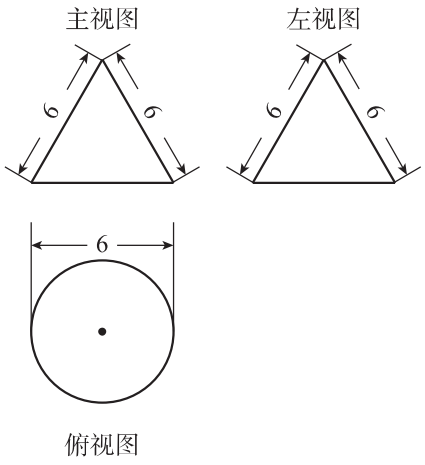


图 30-3-4

解 (1) 由于该立体图形的主视图是一个等腰三角形，左视图是一个等腰三角形，俯视图是一个圆且中间有圆心，可以想象这个立体图形是一个底面直径为 6 cm，母线长为 6 cm 的圆锥.

(2) 如图 30-3-5，等腰三角形的两腰是圆锥的母线 $l=6$ cm，等腰三角形的底边是圆锥底面圆的直径 $d=6$ cm.

设该圆锥的侧面展开图扇形的圆心角为 n°，那么由 $\dfrac{n\pi l}{180}=\pi d$，得

$$n=180\times\frac{6\pi}{6\pi}=180.$$

根据以上数据，可画出这个立体图形的平面展开图. 图 30-3-6 是其平面展开图的一个示意图.

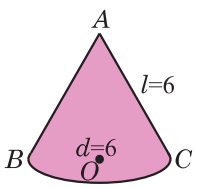


图 30-3-5

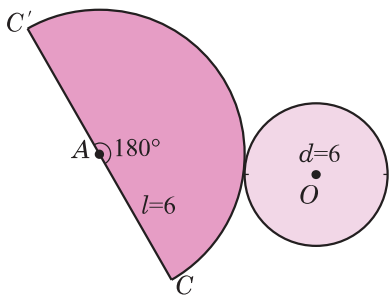
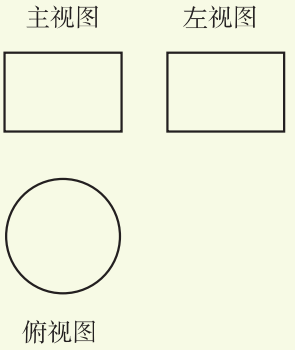


图 30-3-6

（3）在一张硬卡纸上，按照 $AC=AC'=6$ cm，$\angle CAC'=180°$，$BC=6$ cm 的实际尺寸，画出该立体图形的平面展开图：包含一个扇形 CAC' 和一个圆 O（图 30-3-6）. 分别将它们剪下，然后以 AC 为起始边，将扇形 CAC' 卷成一个圆锥面，使扇形半径 AC 与 AC' 重合并黏合，最后用透明胶带粘贴圆 O 的底面接缝，这样就达到了制作该立体图形模型的要求，具体模型如图 30-3-5 所示.

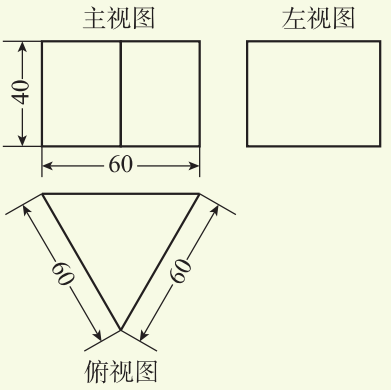
课堂练习 30.3

1. 根据如图所示的三视图，画出相应立体图形的平面展开图.



（第 1 题）

2. 某厂计划制作一批工件，设计师提供了工件的三视图（图中单位：cm），请根据三视图确定制作每个工件所需材料的面积（结果精确到 1 cm^2）.



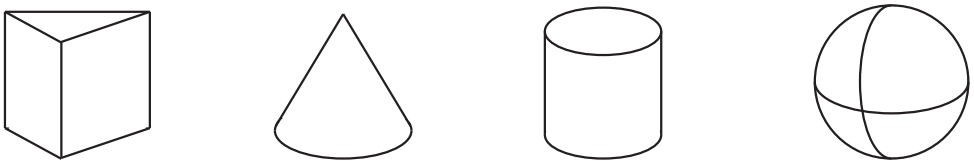
（第 2 题）

习题 30.2—30.3

A

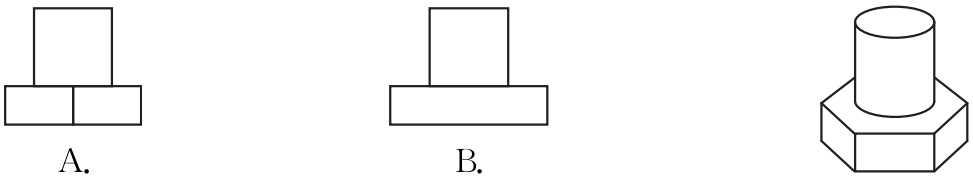
1. 选择题：

（1）下列立体图形中，左视图是三角形的是 （　　）



A.　　B.　　C.　　D.

（2）如图所示的立体图形，它的主视图正确的是 （　　）



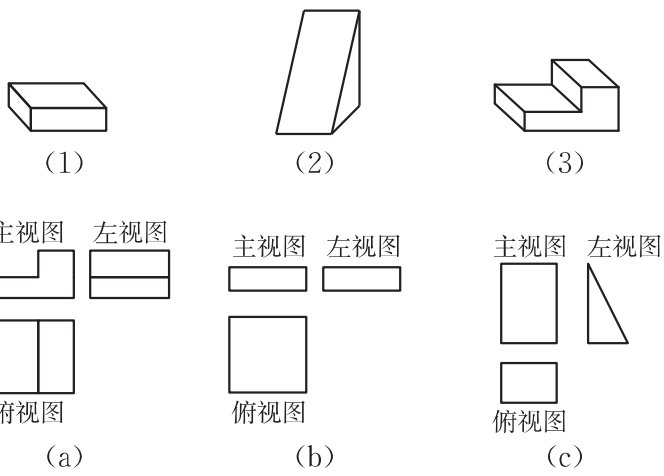
A.　　B.

〔第 1(2)题〕



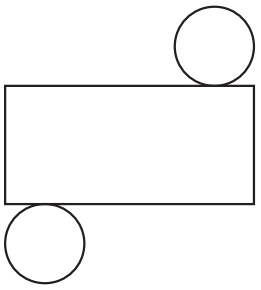
C.　　D.

2. 把下图中的立体图形与它们相对应的三视图用线连接起来.

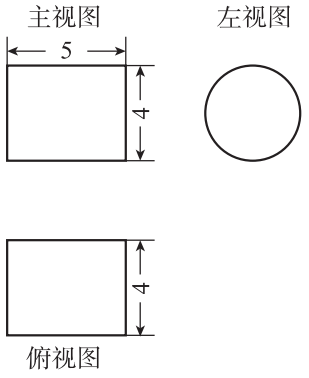


（第 2 题）

3. 如图，这是一个立体图形的平面展开图，请确定该立体图形的形状，并画出它的三视图.



（第 3 题）

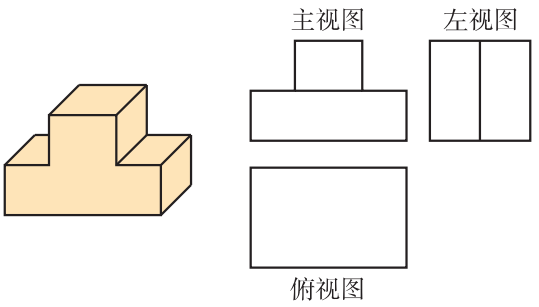


（第 4 题）

4. 如图，已知一个立体图形的三视图，根据图中数据求这个立体图形的表面积（结果保留 π）.

B

5. 下列立体图形的三视图有没有错误（不考虑尺寸）？为什么？如果有错误，应该怎样改正？



（第 5 题）

◎内容提要

1. 基本概念:投影，视图.

2. 投影：

投影：用光线照射物体，在某个平面上得到的影子.

中心投影：由同一个点光源发出的光线形成的投影.

平行投影：由平行的投影线所形成的投影.

3. 视图：

正投影：投影线垂直于投影面产生的投影.

视图：用正投影的方法绘制的物体在投影面上的图形.

主视图：从前向后观察物体时在正面上得到的视图.

俯视图：从上向下观察物体时在水平面上得到的视图.

左视图：从左向右观察物体时在侧面上得到的视图.

◎复习题

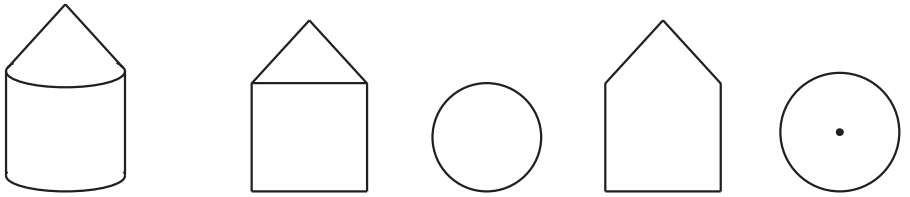
A

1. 选择题：

（1）一张矩形木片在太阳光线照射下形成的影子不可能是（　　）

A. 正方形；　　B. 矩形；　　C. 线段；　　D. 点.

（2）如图，已知一个立体图形，其俯视图正确的是（　　）



〔第 1(2)题〕　A.　B.　C.　D.

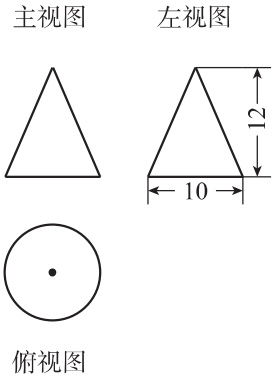
2. 下列影子哪些属于平行投影，哪些属于中心投影？为什么？

① 一个晴空万里的上午，小海身后的影子；

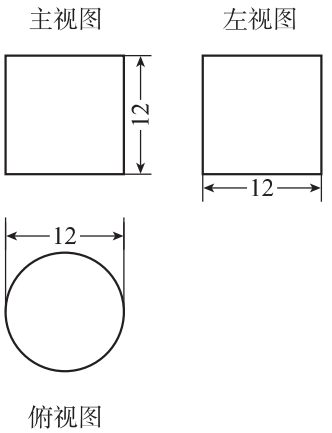
② 太阳光下田间小道上的树影；

③ 小海在幻灯机前经过时投在屏幕上的影子.

3. 如图，这是一个立体图形的三视图(图中单位：cm)，根据图中标注的数据，计算这个立体图形的表面积(结果保留 π).



(第 3 题)

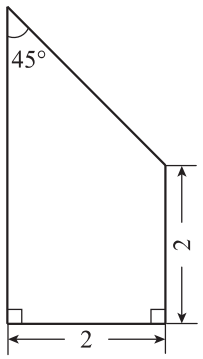


(第 4 题)

4. 如图，这是一个立体图形的三视图，写出该立体图形的名称，并计算它的体积(结果保留 π).

B

5. 如图，已知一个高为 3 cm 的直四棱柱的俯视图(图中单位：cm)，画出它的主视图和左视图.

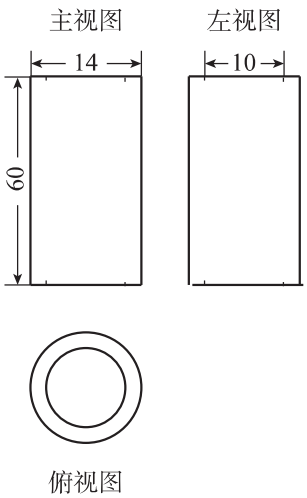


(第 5 题)

6. 如图，这是一个铸件的三视图(图中单位：cm).

(1) 根据三视图描述该铸件的形状；

(2) 要给该铸件的表面全部涂上油漆，根据图中标注的数据，计算需要涂油漆的面积(结果保留 π).



(第 6 题)

上海教育出版社

综合与实践



探寻测量高度的方法

城市原点

探寻测量高度的方法

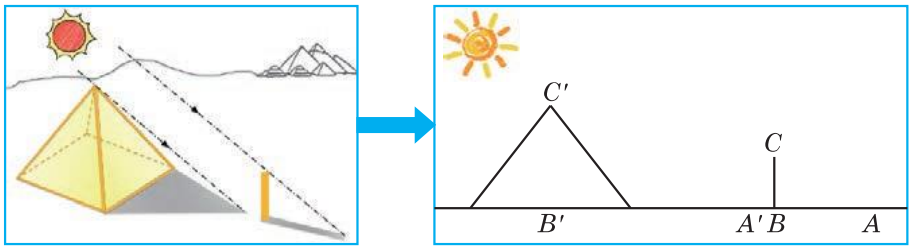
上海的广富林文化遗址保存了 4 000 年前人类的生活遗迹. 骨针广场是该遗址的核心地标，中间竖立着一根象征先人缝制衣被渔网工具的“骨针”(图 1). 显然，用我们熟悉的测量工具，很难直接测出它的高度，有什么办法得到“骨针”的高度呢? 让我们一起探索.



图 1　“骨针”

活动 1　探索泰勒斯测量高度的方法

据传，为了测量埃及金字塔的高度，古希腊数学家泰勒斯(Thales，约公元前 624—约前 547)想出了一种方法，因为太阳光是平行的，从而得到两个相似三角形〔图 2(2)〕，于是只需要测量 BC、AB、$A'B'$的长度，便可以求出金字塔的高度 $B'C'$了.



(1)　　(2)

图 2　泰勒斯测高示意图

(1) 根据图 2 所示的示意图，写出计算金字塔高度的算式，并总结泰勒斯的测量方法.

(2) 选取身边的大树、高楼、旗杆等物体，写出测量方案.

(3) 在什么样的条件下，可以用这个方法测量物体的高度? 使用该测量方法有什么局限性?

成果要求：手绘的数学小报，简单介绍泰勒斯探寻测高方法的经历；说明泰勒斯测高方法的数学原理；利用泰勒斯测高方法制订测量高度的方案，

并记录测量结果.

活动 2　探索商高测量高度的方法

我国商末周初的数学家商高发现了勾股定理的特例(勾三股四弦五)，故勾股定理曾被人称为“商高定理”. 商高在测量上也有巨大的建树.《周髀算经》中记载了周公问商高怎么用“矩”[①]测量距离，商高说道:“……偃矩以望高，覆矩以测深，卧矩以知远……”[②]其中，“偃矩以望高”便是指把矩尺的一边仰着(竖直)，另一边放平，就可以测量高度，如图 3 所示.

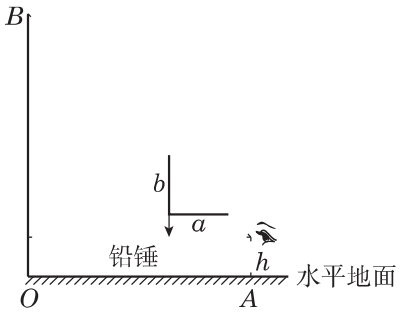


图 3　商高测高示意图

(1) 根据图 3 写出商高用“矩”测量高度的数学原理.

(2) 根据商高的“偃矩以望高”，动手制作一个测量高度的“三角板测高工具”，建议用等腰直角三角板，如图 4 和图 5 所示〔图 4(2)中小圆柱物体是水平仪〕.



(1)　　(2)

图 4　三角板测高工具



图 5　某学生正在测量建筑物高度

① 先写出制作方案；

② 动手制作.

成果要求：手绘的数学小报，包括简单介绍商高探寻测量高度方法的经

① 矩是古代人所用的曲尺，由相互垂直的两条直尺在端点连接而成.

② 蔡宗熹. 千古第一定理——勾股定理[M]. 北京：高等教育出版社，2022.

历，以及商高测量高度方法的数学原理；制作的“三角板测高工具”，并说明使用的数学原理.

活动 3　日常生活中测量高度的方法

日常生活中还有各种测量高度的工具和方法. 例如，可以使用小镜子(图 6)、直角三角板、量角器、卷尺等工具，测量建筑高度.

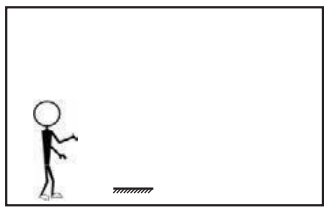


图 6　使用小镜子测高示意图

(1) 在小组内交流，列出尽可能多的测量高度的方法，并用数学语言表达.

(2) 设计一个测量“骨针”高度的方案，并用数学语言表达.

成果要求：手绘的数学小报，简单介绍各种测量高度方法的数学原理；设计利用相应方法测量高度的方案，列出可能用到的测量工具，制作测量数据记录表.

展示交流

(1) 各小组利用活动 3 中设计的测量高度的方案，在校园内选定一些物体，进行现场测量，将测量数据记录在表 1 中.

(2) 各小组交流分享获得的成果，包括不同测量高度方法的探索过程、测量工具制作原理、测量方案及其结果等.

表 1　利用各种测量方案测高的数据记录表

单位：m

测量物	实际高度	测量方案 1		测量方案 2		测量方案 3	
		测量高度	误差	测量高度	误差	测量高度	误差
操场旗杆							
某教学楼							
学校围墙							
其他							

城市原点

在地理测绘中，“城市原点”(也称“城市中心原点”或“城市大地原点”)作为城市的代表性位置地标之一，常被用作测量坐标的原点，代表城市核心区域所在的精确位置(以经纬度标示)，并以此为起点计算与其他城市之间的位置关系. 在文化上，“城市原点”承载着一个城市的历史发展文脉，是城市重要的标志性景观，也是城市历史与发展的缩影符号(图 1).



图 1　上海城市原点标志

活动 1　上海的城市原点在哪里?

1950 年 11 月，为统一上海的平面坐标系统，当时的上海市地政局对全市进行测量，确定了上海的城市原点，并确立了上海城市平面坐标系.

1. 请借助网络信息搜索工具查找上海的城市原点，并根据该信息在上海电子地图上定位上海的城市原点.

2. 请在上海电子地图上定位你的学校，并利用所用地图的比例尺，估算你的学校离上海城市原点的直线距离.

活动 2　城市原点与城市间的距离

度量全球任何地点的地理位置，需要一个统一的制度，称为地理坐标系. 一个地点的经度和纬度，称为地理坐标. 理论上，所有经线长度都是相等的，无论沿哪条经线，南北两极间的距离都相等.

问题 1　请推导同一经线上的两点间的距离.

如图 2，不同于经线，地球上纬线的长度并不相等，赤道是最长的纬线圈，从赤道向两极，纬线长度逐渐减小. 同一纬线上两点间的距离的计算较为复杂，但理论上可以使用算式“$D_{\text{纬线}} \approx 111 \times$经度差$\times$纬度的余弦值”作粗略的

估算. 例如，图 2 中点 A、C 在同一纬线上，这两点间的距离为

$$111\times(40-20)\times\cos 40^\circ\approx 1\,700\ (\text{km}).$$

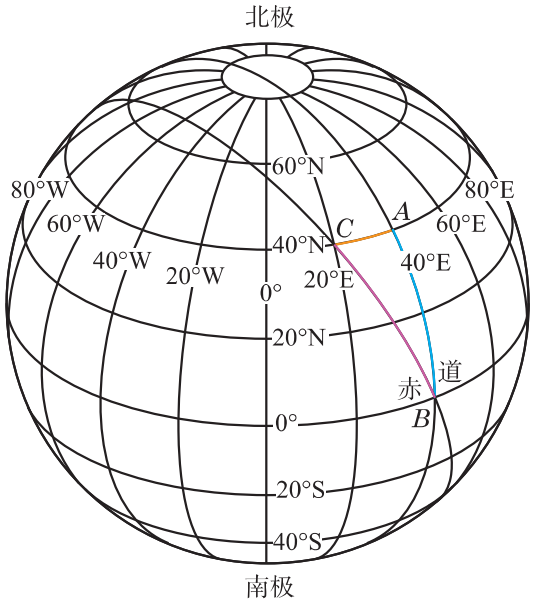


图 2

表 1 中列出了我国部分城市，为了计算这些城市之间沿地球表面的最短距离(即球面距离)，可以采用如下方法：当两个城市的经纬度均不相同时，过其中一点作经线，过另一点作纬线，得到交点，将经线段、纬线段、这两点的地表最短连线近似看成一个以交点为直角顶点的直角三角形，利用勾股定理进行估算.

球面上两点间的球面距离是指以球心为圆心，以这两点为端点的劣弧(或半圆)长度. 如图 2，点 B、C 间的球面距离为劣弧 $\overset{\frown}{BC}$ 的长.

表 1 我国部分城市原点的经纬度

城市	经度	纬度
北京	东经 116°23′	北纬 39°54′
上海		
杭州		
厦门		
重庆		

（续表）

城市	经度	纬度
广州		
成都		
大连		
南京		
长沙		
……		

问题 2　请借助网络信息搜索工具查找并填写表 1 中的各城市原点的经度和纬度.

问题 3　通过估算分别找出表 1 中离上海最近和最远的城市，并写出相应的距离估算值.

问题 4　通过估算分别找出表 1 中距离最近和距离最远的两个城市，并写出相应的距离估算值.

拓展活动

中国的“大地原点”在哪里？她离上海有多远？这个原点在我国经济建设、国防和社会发展等方面发挥着怎样的作用？

附　录

部分中英文词汇索引

27. 二次函数

二次函数	quadratic function	3

28. 相似三角形

黄金分割	golden section	46
相似	similar	54
位似	homothetic	73

29. 三角初步

正弦	sine	87
余弦	cosine	88
正切	tangent	90

30. 投影与视图

中心投影	central projection	114
平行投影	parallel projection	117
三视图	three-view drawing	123
直棱柱	right prism	126

上海教育出版社

后　记

本套教科书根据教育部颁布的《义务教育数学课程标准（2022 年版）》编写.

本册教科书是九年级上册. 在主编李大潜的主持下，由王志强任本册主编，各章的具体分工为：

张建国、蔡志杰、王志强（第 27 章），李振河、周子翔、应坚刚（第 28 章），顾跃平、蔡志杰、王志强（第 29 章），胡军、朱丽霞、陈月兰、朱雁（第 30 章），徐斌艳、朱雁（综合与实践）.

感谢编写团队的团结协作和不懈努力，并对王建磐教授的协助表示衷心的谢忱.

编写过程中，上海市课程教育教学研究基地（中小学课程方案基地）、上海市心理教育教学研究基地、上海基础教育教材建设重点研究基地、两个上海市数学教育教学研究基地（分别设在复旦大学和华东师范大学）等上海高校“立德树人”人文社会科学重点研究基地对教科书编写工作给予了大力支持，在此表示衷心的感谢.

我们要感谢一直支持、关心和帮助我们工作的同志和朋友们. 大家的热忱指导和帮助，我们定会铭记于心，并化为我们的工作动力.

欢迎广大师生来电来函提出宝贵意见.

联系电话：021-64319241（内容）　021-64373213（印刷或装订）

电子邮箱：jcjy@seph.com.cn

地　　址：上海市闵行区号景路 159 弄 C 座上海教育出版社（201101）

上海教育出版社

上海教育出版社

SHUXUE

数学

九年级 上册

绿色印刷产品