义务教育教科书

（五·四学制）

数学



八年级

下册

上海教育出版社

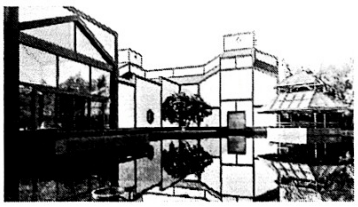
义务教育教科书（五·四学制）

数　学

八年级下册

目　录

第 23 章　四边形



23.1　多边形　2

23.2　平行四边形　8

23.3　矩形、菱形与正方形　22

23.4　三角形的中位线与重心　37

阅读材料　44

几何与建筑窥探

内容提要　46

复习题　48

第 24 章　平面直角坐标系



24.1　平面直角坐标系　52

24.2　两点间的距离公式　67

24.3　平移与轴对称　72

内容提要　81

复习题　82

第 25 章　一次函数



25.1　变量与函数　86

25.2　正比例函数　91

25.3　一次函数　100

25.4　一次函数的应用　113

内容提要　117

复习题　118

第26章 反比例函数



26.1 反比例函数 122

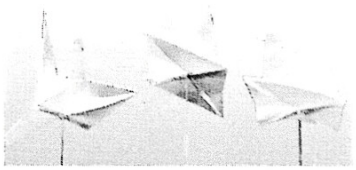
26.2 反比例函数的图像与性质 125

26.3 反比例函数的应用 132

内容提要 135

复习题 136

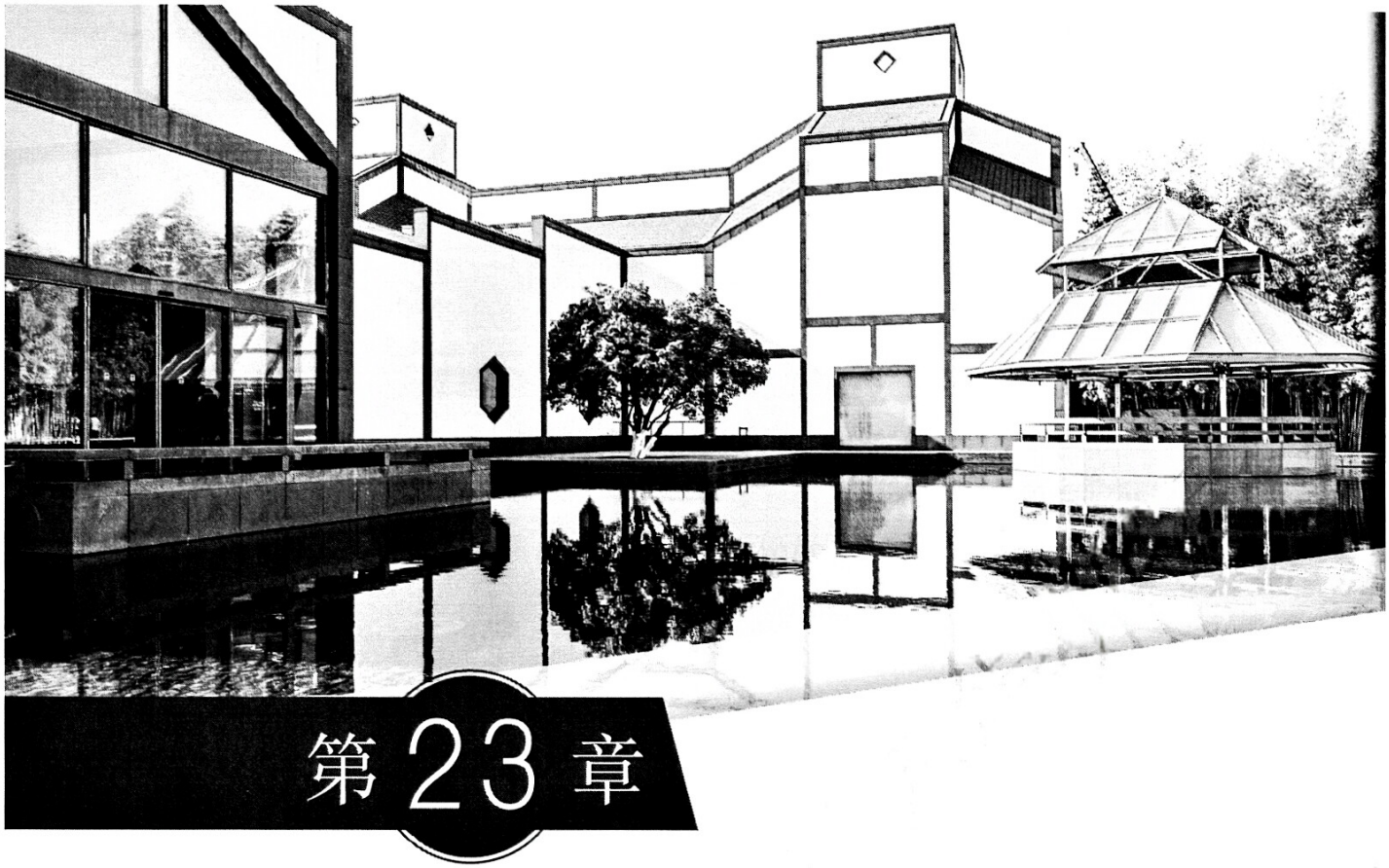
综合与实



折纸与数学 139

神奇的密码 142

部分中英文词汇索引



第23章

四边形

像三角形、长方形、正方形等由线段围成的几何图形称为多边形. 现实生活中随处可见各种各样的多边形.

本章将主要从内角和与外角和的视角来认识多边形. 着重学习平行四边形及其相关性质，并对长方形(矩形)、菱形与正方形这些生活中最常见的四边形做主题性研究. 此外，我们还将学习利用平行四边形的性质研究三角形的中位线与重心.

通过本章的学习，可以提升几何直观和推理能力，为认识和分析更复杂的平面图形打下基础.

1. 多边形的内角和

我们知道，三角形是由不在同一直线上的三条线段首尾顺次连接所组成的封闭图形. 一般地，在同一平面上，由不在同一直线上的三条或三条以上的线段首尾顺次连接所组成的封闭图形叫作多边形.

多边形按组成它的线段的条数分成三角形、四边形、五边形等，三角形是最简单的多边形. 如果一个多边形由 n 条线段组成，那么这个多边形就叫作 n 边形(n 为正整数，且 $n\geqslant 3$). 现实世界中，可以在很多物体上看到多边形，如图 23-1-1 中的屋顶、窗户、地砖等，从中可见三角形、四边形、五边形、六边形、八边形等多边形.

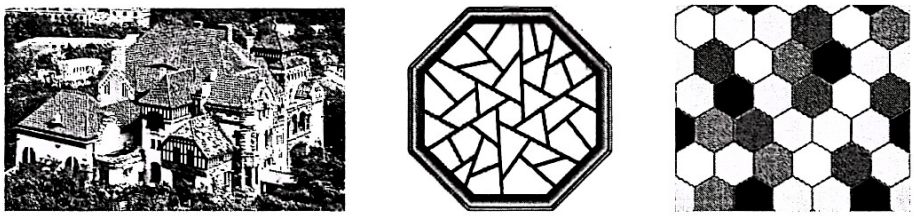


图 23-1-1

组成多边形的每一条线段叫作多边形的边；相邻的两条线段的公共端点叫作多边形的顶点.

多边形各顶点通常用大写英文字母表示. 在图 23-1-2 中，五边形的顶点依次分别是 A、B、C、D、E，记作五边形 $ABCDE$.

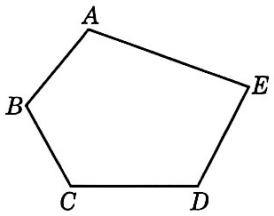


图 23-1-2

多边形相邻两边所成的角叫作多边形的内角. 在图 23-1-2 中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$、$\angle D$、$\angle E$ 都是五边形 $ABCDE$ 的内角.

连接多边形不相邻的两个顶点的线段叫作多边形的对角线. 在图 23-1-3 中，AC、AD 就是五边形 $ABCDE$ 的两条对角线.

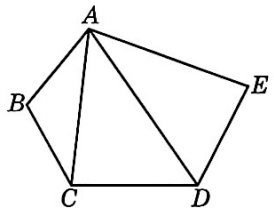


图 23-1-3

对于一个多边形，如果画出它的任意一边所在的直线时，其余各边都在这条直线的同一侧，那么这个多边形叫作凸多边形. 图 23-1-2、图 23-1-4 都是凸多边形，图 23-1-5 不是凸多边形. 如无特别说明，本套教科书中所说的多边形都指凸多边形.

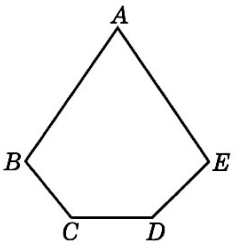


图 23-1-4

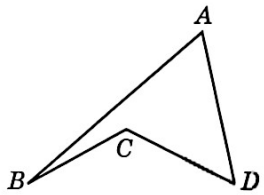


图 23-1-5

已知三角形的内角和等于 180°，那么四边形的内角和等于多少？五边形呢？六边形呢？由此，你能推出 n 边形的内角和公式吗？

在四边形中，一条对角线把这个四边形分成两个三角形，这样四边形的内角和就等于两个三角形的内角和之和. 由此想到，可通过画出多边形的对角线，把求多边形的内角和的问题转化成计算几个三角形的内角和之和(图 23-1-6).

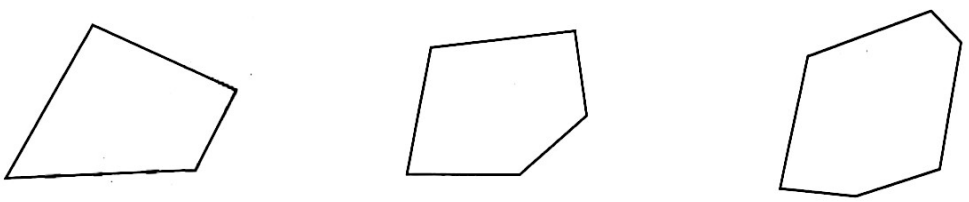

(1)　　(2)　　(3)

图 23-1-6

图 23-1-6(1)中，四边形被分成 2 个三角形，其内角和为 2×180°；

图 23-1-6(2)中，五边形被分成 3 个三角形，其内角和为 3×180°；

图 23-1-6(3)中，六边形被分成 4 个三角形，其内角和为 4×180°.

多边形的内角和定理　n 边形的内角和等于$(n-2)\cdot 180°$.

设多边形是 n 边形. 任取多边形的一个顶点，分别连接该顶点与其他不相邻的各个顶点，这个 n 边形被分成$(n-2)$个三角形，这样 n 边形的内角和等于$(n-2)$个三角形的内角和之和. 因为$(n-2)$个三角形的内角和之和等于$(n-2)\cdot 180°$，所以 n 边形的内角和等于$(n-2)\cdot 180°$.

求十边形的内角和.

根据多边形的内角和定理，得

$$(10-2)\times 180°=8\times 180°=1\,440°.$$

所以，十边形的内角和为 $1\,440°$.

已知一个多边形的内角和等于 $2\,160°$，求这个多边形的边数.

设这个多边形的边数为 n. 根据题意，得

$$(n-2)\cdot 180°=2\,160°,$$

即

$$n-2=12.$$

解得 $n=14$.

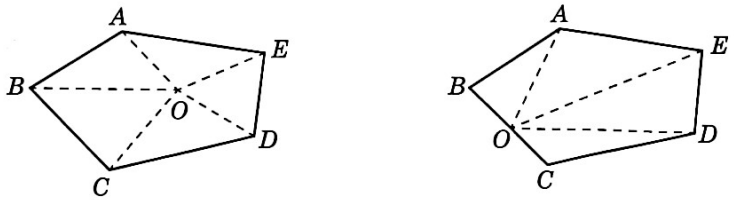
所以，这个多边形的边数为 14.

1. 求下列图形中 x 的值.



(第 1 题)

2. 请分别用图中添辅助线的方法推导出五边形的内角和.



(第 2 题)

3. 已知一个多边形的每个内角都是 160°，求这个多边形的边数.

2. 多边形的外角和

多边形内角的一边的延长线与另一边所组成的角叫作多边形的外角. 图 23-1-7 中，$\angle EDF$ 是五边形 $ABCDE$ 的一个外角. 多边形的外角与它相邻的内角互补.

多边形的外角中，与同一个内角相邻的外角有两个，这两个角为对顶角，它们相等. 图 23-1-8 中，$\angle CDG$ 和 $\angle EDF$ 是五边形 $ABCDE$ 的外角中具有这种关系的两个外角.

对多边形的每个内角，从与它相邻的两个外角中任取一个，这样得到的所有外角的和，叫作多边形的外角和.

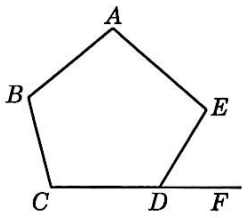


图 23-1-7

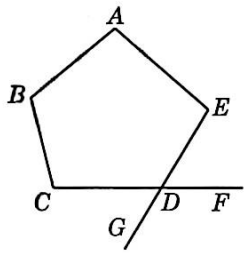


图 23-1-8

n 边形的内角和随着边数的增加而增大，那么 n 边形的外角和是否也随着边数的变化而变化呢?

多边形的外角和定理 多边形的外角和等于 360°.

设多边形是 n 边形. 因为多边形的任意一个外角与同它相邻的内角互补，即它们的和等于 180°(图 23-1-9)，所以 n 边形的外角和加内角和等于 $n \cdot 180°$，于是 n 边形的外角和等于 $n \cdot 180°$ 减去 n 边形的内角和，即 $n \cdot 180° - (n-2) \cdot 180° = 360°$，所以 n 边形的外角和等于 360°.

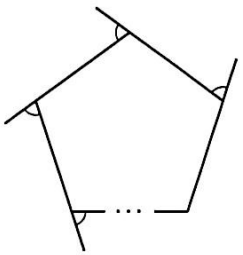


图 23-1-9

多边形的外角和不随着多边形边数的变化而变化，是一个常数.

如果一个多边形的每个外角都是72°，那么这个多边形是几边形？

设这个多边形是 n 边形. 根据题意，得

$$n \cdot 72° = 360°.$$

解得 $n=5$.

所以，这个多边形是五边形.

已知一个多边形的内角和是外角和的6倍，问：这个多边形是几边形？

设这个多边形是 n 边形，则它的内角和是 $(n-2)\cdot 180°$，而外角和等于360°. 根据题意，得

$$(n-2)\cdot 180° = 6\times 360°.$$

解得 $n=14$.

所以，这个多边形是十四边形.

随堂练习 23.1(2)

1. 如果一个多边形的内角和与外角和相等，那么这个多边形的边数是多少？

2. 如果一个多边形的每个外角都等于20°，那么这个多边形的内角和是多少？

习题 23.1

1. 填空题：

(1) 十二边形的内角和是_____；

(2) 如果一个 n 边形的内角和是1 440°，那么 $n=$_____；

(3) 如果过多边形的一个顶点共有8条对角线，那么这个多边形是

_____边形，它的内角和是_____.

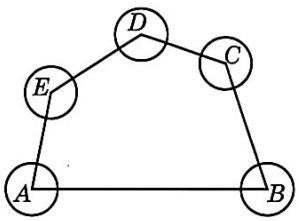
2. 在四边形 $ABCD$ 中，四个内角的度数之比$\angle A:\angle B:\angle C:\angle D=2:3:4:3$. 求这四个内角的度数.

3. 已知一个多边形的每个外角都等于 45°，问：这个多边形的边数是多少?

4. 如果一个多边形的内角和是它的外角和的 5 倍，那么这个多边形的边数是多少?

B

5. 如图，以五边形的每个顶点为圆心、以 1 为半径画圆. 求这些圆与五边形重合部分(涂色部分)的面积.



(第 5 题)

6. 小华和小海的对话如下：

小华说："我发现一个多边形的内角和是 2 000°."

小海说："这是不可能的！你一定是把一个外角当作内角加在了一起."

根据对话信息回答下列问题：

(1) 小华的说法对吗? 为什么?

(2) 如果小海的说法是对的，那么请求出"小华错把外角当作内角"的那个外角的度数.

平行四边形在现实生活中随处可见，在图 23-2-1 所示的图片中，教室里的黑板和课桌桌面、小区门口的电动伸缩门、楼梯的栏杆等，都给我们以平行四边形的形象. 你还能举出一些例子吗？

在图 23-2-1 中，找出每幅图中的一个平行四边形，并把它们勾画出来.

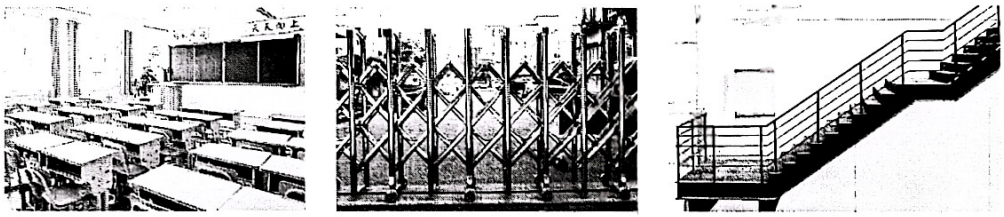


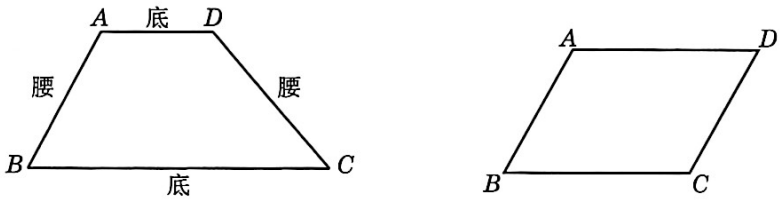
图 23-2-1

定义 有一组对边平行的四边形叫作梯形. 两组对边分别平行的四边形叫作平行四边形.

由上述定义，可知平行四边形是梯形的一种特殊情形.

也有一些书中定义的梯形不包括平行四边形.

在梯形中，把一组平行的边称为梯形的底，另外的两边称为梯形的腰，如图 23-2-2(1)所示.



(1) (2)

图 23-2-2

平行四边形用符号“$\square$”表示，如图 23-2-2(2)所示的平行四边形 $ABCD$，记作“$\square ABCD$”.

1. 平行四边形的性质

平行四边形除了具有两组对边分别平行的性质外，还有其他性质吗？

根据定义画一个平行四边形，观察所画图形的边与角，它的对边之间有怎样的数量关系？它的对角之间有怎样的数量关系？

根据平行四边形的定义，可以推出平行四边形的一个性质定理：

定理 1 平行四边形的对边相等.

如图 23-2-3，已知：四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

求证：$AB=CD$，$BC=AD$.

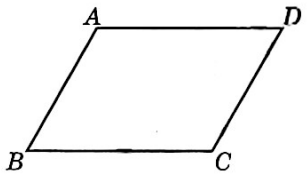


图 23-2-3

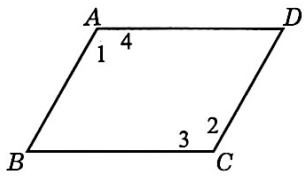


图 23-2-4

如图 23-2-4，连接 AC.

因为四边形 $ABCD$ 是一个平行四边形，由平行四边形的定义，得 $AB\parallel DC$，$AD\parallel BC$. 所以$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$. 又因为 AC 是$\triangle ABC$ 和$\triangle CDA$ 的公共边，所以$\triangle ABC\cong\triangle CDA$. 由此可得 $AB=CD$，$BC=AD$.

平行四边形的对角相等吗？为什么？

利用平行四边形的定义或性质定理 1，又可以得到平行四边形的一个性质定理：

定理 2　平行四边形的对角相等.

请自行证明该定理.

如图 23-2-5，在$\square ABCD$中，$\angle A$比$\angle B$大 60°. 求这个平行四边形各个内角的度数.

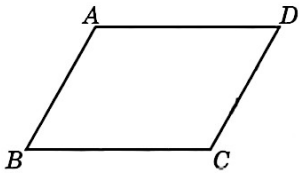


图 23-2-5

∵　四边形 $ABCD$ 是一个平行四边形，

∴　$\angle B=\angle D$，$\angle A=\angle C$（平行四边形的对角相等）.

∵　$AD/\!/BC$，

∴　$\angle A+\angle B=180°$.

设$\angle B=x°$，由“$\angle A$比$\angle B$大 60°”，知$\angle A=x°+60°$，于是可得

$$x+60+x=180.$$

解得 $x=60$.

于是 $x+60=120$.

所以，$\angle B=\angle D=60°$，$\angle A=\angle C=120°$.

如图 23-2-6，已知直线 $l_1/\!/l_2$，A、C 是直线 l_1 上两点，$AB\perp l_2$，$CD\perp l_2$，垂足分别为 B、D. 试问：AB 与 CD 是否相等？为什么？

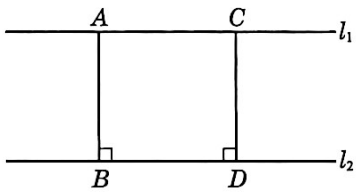


图 23-2-6

$AB=CD$. 证明如下：

∵　$AB\perp l_2$，$CD\perp l_2$，垂足分别为 B、D，

∴　$\angle ABD=\angle CDB=90°$.

∴　$\angle ABD+\angle CDB=180°$.

∴　$AB/\!/CD$.

又∵　$l_1/\!/l_2$，

∴　四边形 $ABDC$ 是一个平行四边形.

∴　$AB=CD$（平行四边形的对边相等）.

我们知道，例 2 中的两条垂线段 AB、CD 的长度相等. 类似地，l_1 上任意给定一点 P 到直线 l_2 的垂线段的长度都相等. 这个长度叫作这两条平行线之间的距离.

如图 23-2-6，直线 l_1、l_2 平行，A 是直线 l_1 上任意一点，$AB \perp l_2$，垂足为 B，线段 AB 的长度就是直线 l_1、l_2 之间的距离.

……

“两条平行线之间的距离”与前面已经学过的“点与点之间的距离”“点到直线的距离”有何区别与联系？

我们知道三角形具有稳定性，那么四边形也具有稳定性吗？

如图 23-2-7，用 4 根木条制作四边形的木框，随意拉动木框的边，它的形状和大小会发生变化吗？

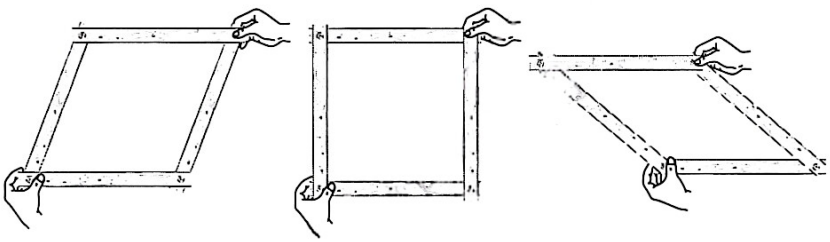


图 23-2-7

我们发现，四边形的边长确定后，其形状和大小不能完全确定，这说明四边形具有不稳定性.

四边形的不稳定性在日常生活和生产中有许多应用，如升降机、伸缩晾衣架、拉伸门(图 23-2-8)等. 你还能举出日常生活中利用四边形不稳定性的一些例子吗？

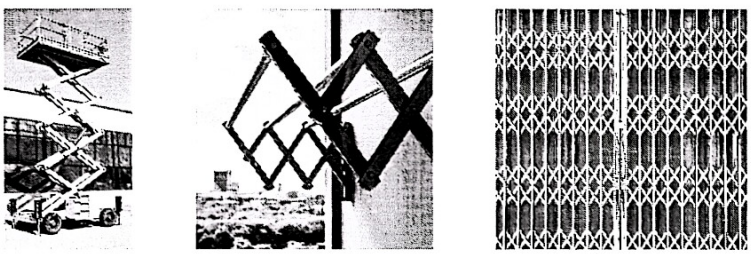


图 23-2-8

1. 四边形的不稳定性是指当四边形的边长一定时，不能确定的是(　　)

A. 四边形的外角和；　　B. 四边形的周长；

C. 四边形的内角大小；　　D. 四边形的内角和.

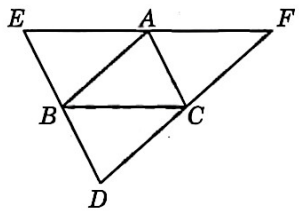
2. (1) 在□$ABCD$ 中，$\angle A=60°$. 求其他各内角的度数.

(2) 已知□$ABCD$ 的周长等于 48，$AB=2BC$. 求各边的长.

3. 如图，已知 EF、ED、FD 分别过△ABC 的顶点 A、B、C，且 $EF/\!/BC$，$ED/\!/AC$，$FD/\!/AB$.

(1) 指出图中所有的平行四边形；

(2) 求证：A、B、C 分别是线段 EF、ED、DF 的中点.



(第 3 题)

我们已经研究了平行四边形的边、角的性质，那么平行四边形的对角线有什么性质呢?

如图 23-2-9，已知□$ABCD$ 的两条对角线 AC、BD 相交于点 O，观察线段 OA、OC、OB、OD，你发现哪些线段相等?

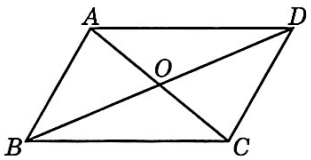


图 23-2-9

根据平行四边形的定义和性质定理 1，又可以得到平行四边形的一个性质定理：

定理 3　平行四边形的对角线互相平分.

如图 23-2-10，已知：在□$ABCD$ 中，对角线 AC、BD 相交于点 O.

求证：$OA=OC$，$OB=OD$.

因为四边形 $ABCD$ 是一个平行四边形，

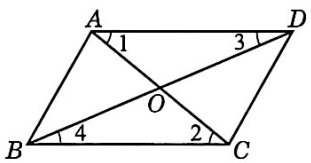


图 23-2-10

由平行四边形的定义和性质定理 1，得 $AD \parallel BC$，$AD=BC$，所以 $\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$. 所以 $\triangle AOD \cong \triangle COB$. 由此可得 $OA=OC$，$OB=OD$.

平行四边形是中心对称图形吗？如果是，你能找出它的对称中心吗？

平行四边形是中心对称图形，对称中心是对角线的交点.

如图 23-2-11，已知 $\square ABCD$ 的两条对角线 AC、BD 相交于点 O，且两条对角线长的和为 30，CD 的长为 9. 求 $\triangle COD$ 的周长.

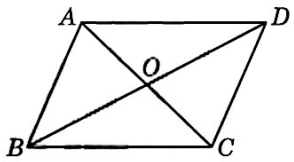


图 23-2-11

∵ 四边形 $ABCD$ 是一个平行四边形，

∴ $OC=\frac{1}{2}AC$，$OD=\frac{1}{2}BD$（平行四边形的对角线互相平分）.

又∵ $AC+BD=30$，

∴ $OC+OD=\frac{1}{2}(AC+BD)=15$.

∵ $CD=9$，

∴ $\triangle COD$ 的周长 $=OC+OD+CD=15+9=24$.

如图 23-2-12，已知：在 $\square ABCD$ 中，对角线 AC、BD 相交于点 O，直线 EF 过点 O 且与边 AB、CD 分别相交于点 E、F.

求证：$OE=OF$.

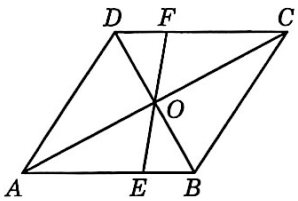


图 23-2-12

∵ 四边形 $ABCD$ 是一个平行四边形，

∴ $OB=OD$（平行四边形的对角线互相平分）.

∵ $AB \parallel CD$，

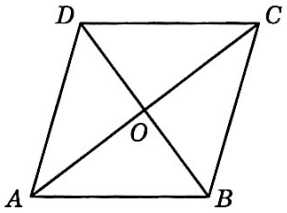
∴ $\angle EBO=\angle FDO$.

又∵ $\angle EOB=\angle FOD$，

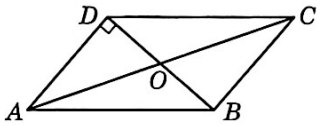
∴ $\triangle EOB \cong \triangle FOD$.

∴ $OE=OF$.

1. 如图，在$\square ABCD$中，对角线AC、BD相交于点O，且$AB=5$，$\triangle COD$的周长为12. 求$\square ABCD$的两条对角线长的和.



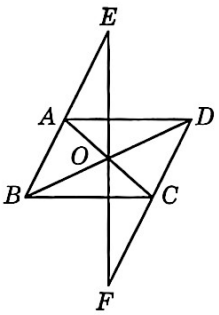
（第1题）



（第2题）

2. 如图，在$\square ABCD$中，对角线AC、BD相交于点O，$\angle ADB=90°$，$AC=12$，$BD=6$. 求AD的长.

3. 如图，已知：在$\square ABCD$中，对角线AC、BD相交于点O，过点O作一条直线，分别交BA、DC的延长线于点E、F. 求证：$OE=OF$.



（第3题）

2. 平行四边形的判定

判定一个平行四边形，除了运用平行四边形的定义外，还有其他的方法吗？

“平行四边形的对边相等”，它的逆命题是真命题还是假命题？

这个逆命题是真命题，由此得到平行四边形的一个判定定理：

定理1 两组对边分别相等的四边形是平行四边形.

如图 23-2-13，已知：在四边形 $ABCD$ 中，$AB=CD$，$BC=AD$.

求证：四边形 $ABCD$ 是一个平行四边形.

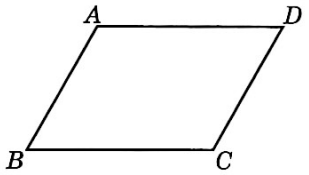


图 23-2-13

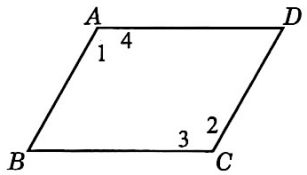


图 23-2-14

如图 23-2-14，连接 AC. 在$\triangle ABC$ 和$\triangle CDA$ 中，因为 $AB=CD$，$BC=AD$，$AC=CA$，所以$\triangle ABC\cong\triangle CDA$. 由此推出 $\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$. 所以 $AB/\!/CD$，$BC/\!/AD$. 由平行四边形的定义，得四边形 $ABCD$ 是一个平行四边形.

……

如果将平行四边形的判定定理 1 中的“两组对边”改成“一组对边”，这一组对边还需要满足什么条件，才可以保证这个四边形一定是平行四边形呢？为什么？

易知“平行四边形的任意一组对边平行且相等”，可以证明其逆命题也是真命题. 由此，又得到平行四边形的一个判定定理：

定理 2 一组对边平行且相等的四边形是平行四边形.

如图 23-2-15，已知：在四边形 $ABCD$ 中，$AB/\!/CD$，且 $AB=CD$.

求证：四边形 $ABCD$ 是一个平行四边形.

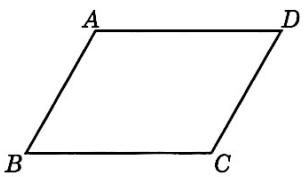


图 23-2-15

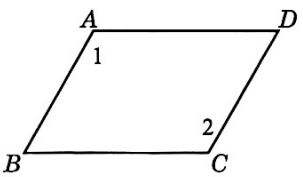


图 23-2-16

如图 23-2-16，连接 AC. 在$\triangle ABC$ 和$\triangle CDA$ 中，因为 $AB/\!/CD$，所以$\angle 1=\angle 2$. 又因为 $AB=CD$，$AC=CA$，所以$\triangle ABC\cong\triangle CDA$. 由此推

出 $BC=DA$. 由平行四边形的判定定理 1，得四边形 $ABCD$ 是一个平行四边形.

如图 23-2-17，已知：在$\square ABCD$ 中，点 E、F 分别在边 AB、CD 上，$AE=CF$.

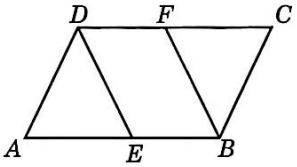


图 23-2-17

求证：四边形 $DEBF$ 是一个平行四边形.

由已知条件，可知 $EB/\!/DF$，且 $EB=DF$. 根据平行四边形的判定定理 2，可以推出结论.

∵ 四边形 $ABCD$ 是一个平行四边形，

∴ $AB/\!/CD$，

$AB=CD$（平行四边形的对边相等）.

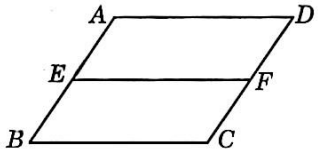
又∵ 点 E、F 分别在边 AB、CD 上，$AE=CF$，

∴ $DF/\!/EB$，$CD-CF=AB-AE$，

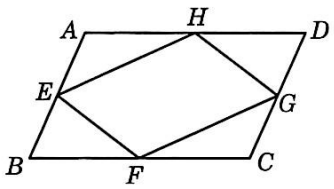
即 $DF/\!/EB$，$DF=EB$.

∴ 四边形 $DEBF$ 是一个平行四边形（一组对边平行且相等的四边形是平行四边形）.

1. 如图，已知：在$\square ABCD$ 中，E、F 分别是边 AB、CD 的中点. 求证：$EF=BC$.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，已知：在$\square ABCD$ 中，E、F、G、H 分别是边 AB、BC、CD、DA 的中点. 求证：四边形 $EFGH$ 是一个平行四边形.

如图 23-2-18，已知：在四边形 $ABCD$ 中，$\angle A=\angle C$，$\angle B=\angle D$.

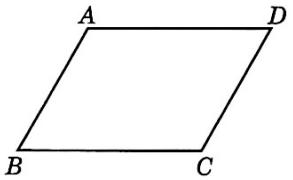


图 23-2-18

求证：四边形 $ABCD$ 是一个平行四边形.

在四边形 $ABCD$ 中，$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360°$（多边形的内角和定理）.

又∵ $\angle A=\angle C$，$\angle B=\angle D$，

∴ $\angle A+\angle B=180°$，$\angle A+\angle D=180°$.

∴ $AD\parallel BC$，$AB\parallel CD$.

∴ 四边形 $ABCD$ 是一个平行四边形.



“平行四边形的对角线互相平分”，它的逆命题是真命题还是假命题？

这个逆命题是真命题. 由此，又得到平行四边形的一个判定定理：

定理 3 对角线互相平分的四边形是平行四边形.

如图 23-2-19，已知：四边形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 相交于点 O，且 $AO=CO$，$BO=DO$.

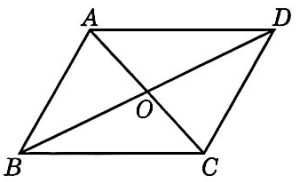


图 23-2-19

求证：四边形 $ABCD$ 是一个平行四边形.

在$\triangle AOB$ 和$\triangle COD$ 中，因为 $AO=CO$，$\angle AOB=\angle COD$，$BO=DO$，所以$\triangle AOB\cong\triangle COD$. 由此推出 $AB=CD$，$\angle ABO=\angle CDO$，所以 $AB\parallel CD$. 由平行四边形的判定定理 2，得四边形 $ABCD$ 是一个平行四边形.

如图 23-2-20，已知：在$\square ABCD$ 中，点 E、F 在对角线 AC 上，且 $AE=CF$.

求证：四边形 $BFDE$ 是一个平行四边形.

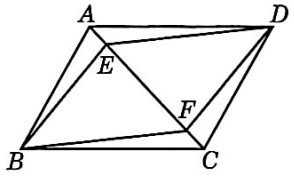


图 23-2-20

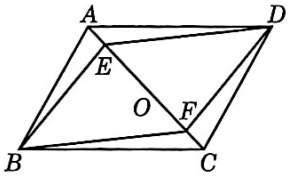


图 23-2-21

由已知条件，可推出$\triangle AED\cong\triangle CFB$，$\triangle AEB\cong\triangle CFD$. 于是可以利用平行四边形的定义或判定定理 1、2 获得证明结论所需的条件. 因此，可以有多条证明路径.

注意 E、F 是对角线上的两点，从判定定理 3 所需的条件考虑，想到连接 BD. 设 BD、AC 相交于点 O，则只需要证明 $OE=OF$，就可推出结论.

如图 23-2-21，连接 BD，并设其与 AC 相交于点 O.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是一个平行四边形，

$\therefore$ $BO=DO$，$AO=CO$（平行四边形的对角线互相平分）.

$\because$ $AE=CF$，

$\therefore$ $AO-AE=CO-CF$，

$\therefore$ $EO=FO$.

$\therefore$ 四边形 $BFDE$ 是一个平行四边形（对角线互相平分的四边形是平行四边形）.

1. 用两个全等的三角形(每个三角形的三边互不相等)，按照不同的方法可以拼成一些不同的四边形. 这些四边形都是平行四边形吗？为什么？

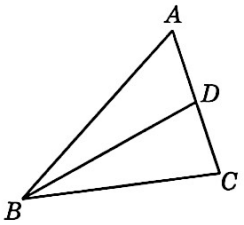
2. 已知：在四边形 $ABCD$ 中，$\angle A$ 和 $\angle B$ 互补，$\angle A=\angle C$. 求证：四边形 $ABCD$ 是一个平行四边形.

3. 如图，BD 是$\triangle ABC$ 的中线. 按以下要求作图：

① 延长 BD 至点 E，使 $DE=BD$；

② 连接 AE、CE.

四边形 $ABCE$ 是一个平行四边形吗？为什么？



（第 3 题）

习题 23.2

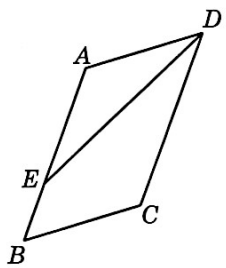
1. 填空题：

（1）在$\square ABCD$ 中，如果$\angle A:\angle B=2:3$，那么$\angle C$、$\angle D$ 的度数分别是_____；

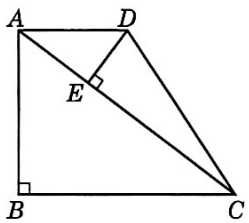
（2）已知平行四边形的周长是 24，相邻两边的长相差 4，那么相邻两边的长分别是_____；

（3）已知 O 是$\square ABCD$ 的对角线 AC、BD 的交点，$AC=24$ mm，$BD=38$ mm，$AD=28$ mm，则$\triangle OBC$ 的周长等于_____.

2. 如图，已知：在$\square ABCD$ 中，$\angle ADC$ 的平分线与边 AB 相交于点 E. 求证：$BE+BC=CD$.



（第 2 题）

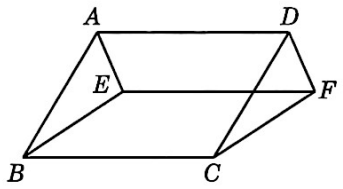


（第 3 题）

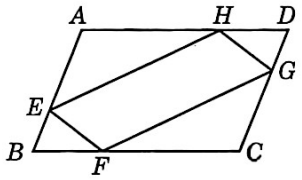
3. 如图，在梯形 $ABCD$ 中，$AD/\!/BC$，$\angle B=90°$，$AD=2$，$AB=3$，$BC=4$，$DE\perp AC$，垂足为 E. 求 DE 的长.

4. 已知$\square ABCD$的对角线AC、BD相交于点O，这个平行四边形的周长是16，且$\triangle AOB$的周长比$\triangle BOC$的周长小2. 求边AB、BC的长.

5. 如图，已知：四边形$AEFD$和四边形$EBCF$都是平行四边形. 求证：四边形$ABCD$是一个平行四边形.



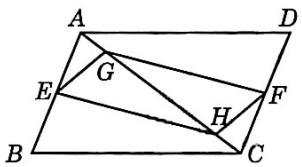
（第5题）



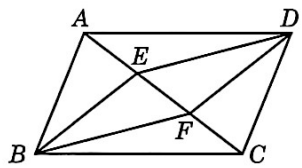
（第6题）

6. 如图，已知：在$\square ABCD$中，E、F、G、H分别是边AB、BC、CD、DA上的点，且$AE=CG$，$BF=DH$. 求证：四边形$EFGH$是一个平行四边形.

7. 如图，已知：G、H是$\square ABCD$对角线AC上两点，且$AG=CH$，E、F分别是边AB、CD的中点. 求证：四边形$EHFG$是一个平行四边形.



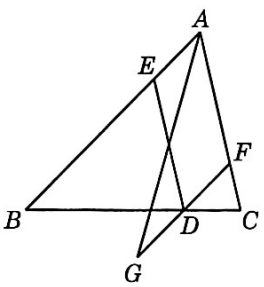
（第7题）



（第8题）

8. 如图，已知：E、F是$\square ABCD$对角线AC的三等分点. 求证：四边形$BFDE$是一个平行四边形.

9. 如图，已知：在$\triangle ABC$中，D、E、F分别为边BC、AB、AC上的点，$AF \parallel ED$，且$AF=ED$，延长FD到点G，使$DG=FD$. 求证：ED、AG互相平分.



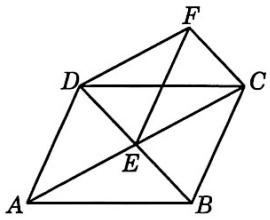
（第9题）

B

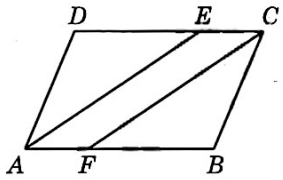
10. 如图，已知：$\square ABCD$ 的对角线 AC、BD 相交于点 E，$DF /\!/ AC$，$\angle DFC=\angle AEB$，连接 EF.

(1) 求证：$DF=AE$；

(2) 求证：四边形 $BCFE$ 是一个平行四边形.



(第 10 题)



(第 11 题)

11. 如图，已知：在$\square ABCD$ 中，AE 平分$\angle DAB$ 交边 CD 于点 E，CF 平分$\angle DCB$ 交边 AB 于点 F.

(1) 求证：四边形 $AFCE$ 是一个平行四边形；

(2) 若 BG 平分$\angle ABC$ 交线段 DE 于点 G，且 $AD=2EG=2$，求四边形 $ABCD$ 的周长.

在本节中，我们将研究几类特殊的四边形——矩形、菱形与正方形. 在小学阶段，我们已经了解过长方形与正方形，其中长方形就是我们将要介绍的矩形.

1. 矩形

定义 四个内角都是直角的四边形叫作矩形.

生活中有很多矩形的实例，如图 23-3-1，黑板、教科书、地砖，它们的边框都可以看作矩形.



黑板　　教科书　　地砖

图 23-3-1

如图 23-3-2，在矩形 $ABCD$ 中，由矩形的定义，可知 $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90°$. 所以 $\angle A+\angle B=180°$，$\angle A+\angle D=180°$，所以 $AD\parallel BC$，$AB\parallel CD$，即矩形 $ABCD$ 的两组对边平行. 根据平行四边形的定义，可知矩形必然是平行四边形. 所以，矩形是一种特殊的平行四边形.

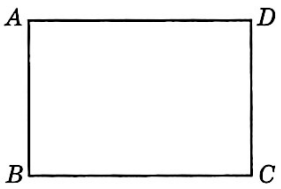


图 23-3-2

作为一种特殊的平行四边形，矩形除了具有平行四边形的所有性质，还可能具有哪些性质呢？

我们仍然可以从边、角和对角线来研究矩形的性质.

利用矩形的定义和平行四边形的性质，可以得到矩形的性质定理：

定理 矩形的两条对角线相等.

如图 23-3-3，已知：四边形 $ABCD$ 是一个矩形，AC、BD 是它的对角线.

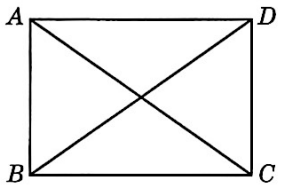


图 23-3-3

求证：$AC=BD$.

因为矩形 $ABCD$ 是一个平行四边形，由平行四边形的性质定理 1，得 $AB=DC$. 又因为$\angle ABC=\angle DCB=90°$，$BC=CB$，所以$\triangle ABC\cong\triangle DCB$. 所以 $AC=BD$.

由于平行四边形是中心对称图形，因此矩形也是中心对称图形，其两条对角线的交点是对称中心.



矩形是轴对称图形吗？如果是，请找出其对称轴.

如图 23-3-4，矩形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 相交于点 O，且$\angle AOD=120°$，$AB=4$ cm. 求 AC、BD 的长.

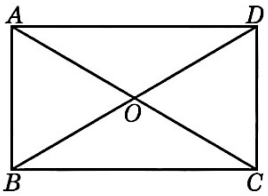


图 23-3-4

∵ 四边形 $ABCD$ 是一个矩形，

∴ $AC=BD$（矩形的两条对角线相等）.

∵ 四边形 $ABCD$ 是一个平行四边形，

∴ $OA=OC=\frac{1}{2}AC$，$OB=OD=\frac{1}{2}BD$（平行四边形的对角线互相平分）.

∴ $OA=OB$.

∴ $\angle ABO=\angle BAO$.

∵ $\angle AOD=120°$，

∴ $\angle AOB=60°$.

∴ $\angle ABO=\angle BAO=60°$.

∴ $\triangle AOB$ 是一个等边三角形.

∴ $OA=AB=4$（cm）.

∴ $BD=AC=2OA=8$（cm）.

由矩形的定义可以判定一个四边形是矩形. 除此之外，矩形还有其他的判定方法吗?

由于矩形是四个内角均为直角的平行四边形，那么对于平行四边形而言，有几个角是直角就能保证它是一个矩形呢?

利用矩形的定义和平行四边形的性质，可以推出矩形的一个判定定理：

定理 1 有一个内角是直角的平行四边形是矩形.

如图 23-3-5，已知：在平行四边形 $ABCD$ 中，$\angle A=90^\circ$.

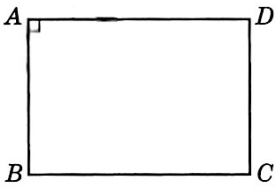


图 23-3-5

求证：平行四边形 $ABCD$ 是一个矩形.

因为四边形 $ABCD$ 是一个平行四边形，由平行四边形的性质定理 2，得 $\angle A=\angle C$，$\angle B=\angle D$. 由多边形的内角和定理，得 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360^\circ$，又因为 $\angle A=90^\circ$，所以 $\angle C=90^\circ$，$2\angle B=180^\circ$. 所以 $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90^\circ$. 由矩形的定义，得平行四边形 $ABCD$ 是一个矩形.

如果一个平行四边形是矩形，那么它的对角线相等. 这个命题的逆命题也是真命题. 由此，又得到矩形的一个判定定理：

定理 2 对角线相等的平行四边形是矩形.

如图 23-3-6，已知：在平行四边形 $ABCD$ 中，$AC=BD$.

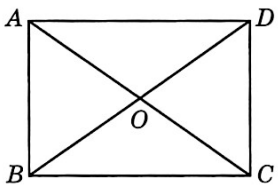


图 23-3-6

求证：平行四边形 $ABCD$ 是一个矩形.

因为四边形 $ABCD$ 是一个平行四边形，由平行四边形的性质定理 1，得 $AB=DC$. 又因为 $AC=BD$，$BC=CB$，所以 $\triangle ABC\cong\triangle DCB$. 所以 $\angle ABC=\angle DCB$. 由平行四边形的定义，知 $AB/\!/DC$，进而 $\angle ABC+\angle DCB=180^\circ$. 所以 $\angle ABC=90^\circ$. 由矩形

的判定定理 1，得平行四边形 $ABCD$ 是一个矩形.

如图 23-3-7，已知：矩形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 相交于点 O，点 E、F、G、H 分别在 AO、BO、CO、DO 上，且 $AE=BF=CG=DH$.

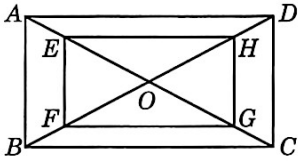


图 23-3-7

求证：四边形 $EFGH$ 是一个矩形.

根据已知条件，可以先证明四边形 $EFGH$ 是平行四边形，再证明对角线 EG、FH 相等就可以了.

∵ 四边形 $ABCD$ 是一个矩形，

∴ $AC=BD$（矩形的两条对角线相等）.

∵ 四边形 $ABCD$ 是一个平行四边形，

∴ $OA=OC=\frac{1}{2}AC$，$OB=OD=\frac{1}{2}BD$（平行四边形的对角线互相平分）.

∴ $OA=OC=OB=OD$.

又∵ $AE=BF=CG=DH$，

∴ $OE=OF=OG=OH$.

∴ 四边形 $EFGH$ 是一个平行四边形（对角线互相平分的四边形是平行四边形）.

∵ $EO+OG=FO+OH$，

∴ $EG=FH$.

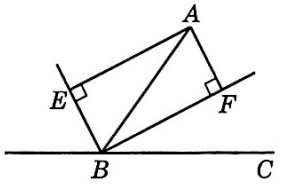
∴ 平行四边形 $EFGH$ 是一个矩形（对角线相等的平行四边形是矩形）.

1. 工人师傅在做矩形门窗或零件时，不仅要测量两组对边是否分别相等，常常还要测量它们的两条对角线是否相等，以确保图形是矩形，请说明理由.

2. 已知一个矩形的一条对角线长为 8 cm，两条对角线的夹角是 60°. 求这个矩形相邻两边的长.


（第 1 题）

3. 如图，已知：BF、BE 分别是$\angle ABC$ 与它的邻补角的平分线，$AE \perp BE$，$AF \perp BF$，垂足分别为 E、F. 求证：四边形 $AEBF$ 是一个矩形.



（第 3 题）

2. 菱形

定义 四条边都相等的四边形叫作菱形.

如图 23-3-8，伸缩晾衣架、自动伸缩门、衣服都有菱形图案.

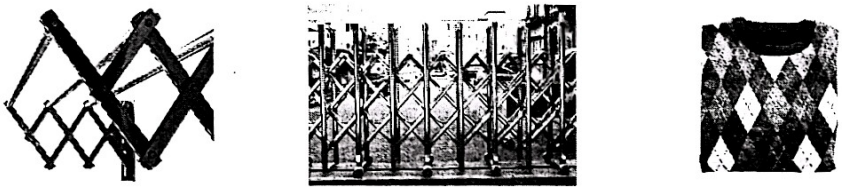


图 23-3-8

如图 23-3-9，在菱形 $ABCD$ 中，由菱形的定义，可知 $AB=BC=CD=AD$. 因为菱形 $ABCD$ 的两组对边分别相等，根据平行四边形的判定定理 1，得到菱形必然是平行四边形. 所以，菱形是一种特殊的平行四边形.

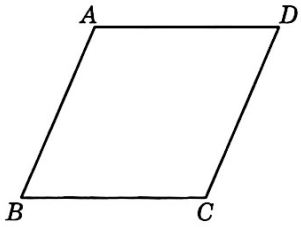


图 23-3-9

如图 23-3-10，将四个大小相同的矩形拼在一起，根据矩形的性质定理，里面蕴含了一个菱形. 这个菱形可能有什么性质？这些性质其他菱形也具备吗？

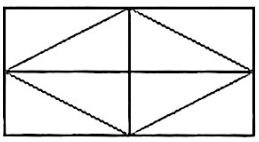


图 23-3-10

我们仍然从边、角和对角线来研究菱形的性质.

利用菱形的定义和平行四边形的性质，可以得到菱形的性质定理：

定理 菱形的两条对角线互相垂直.

如图 23-3-11，已知：四边形 $ABCD$ 是一个菱形，AC、BD 是它的对角线.

求证：$AC \perp BD$.

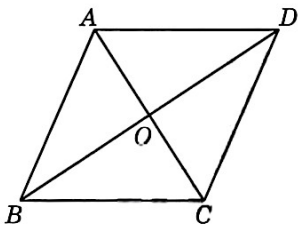


图 23-3-11

记 O 为对角线 AC、BD 的交点. 因为菱形 $ABCD$ 是一个平行四边形，由平行四边形的性质定理 3，得 $BO=DO$. 又因为 $AB=AD$，根据“等腰三角形三线合一”，可得 $AO \perp BD$，即 $AC \perp BD$.

由于平行四边形是中心对称图形，因此菱形也是中心对称图形.



菱形是轴对称图形吗？如果是，找出其对称轴，并尝试与矩形的对称轴作比较.

如图 23-3-12，已知菱形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 相交于点 O，$AB=13$ cm，$AC=24$ cm. 求这个菱形的面积.

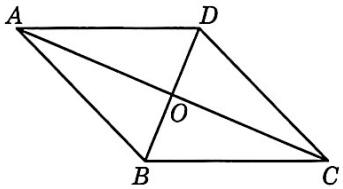


图 23-3-12

由菱形的性质定理，可知 $AC \perp BD$，从而菱形的面积等于四个直角三角形的面积之和. 由平行四边形的性质，可知 O 是 AC 和 BD 的中点，从而这四个直角三角形面积相等.

对于 Rt$\triangle AOB$ 而言，斜边 AB 已知，如果能求得其一条直角边，那么就能求得另一条直角边，进而可求得其面积，从而可得菱形 $ABCD$ 的面积.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是一个菱形，

$\therefore$ $AC \perp BD$（菱形的两条对角线互相垂直）.

$\therefore$ $\angle AOB=90°$，$\triangle AOB$ 为直角三角形.

∵ 四边形 $ABCD$ 是一个平行四边形，

∴ $OA=OC$，$OB=OD$（平行四边形的对角线互相平分）.

∴ $S_{菱形ABCD}=4S_{Rt\triangle AOB}$.

在 $Rt\triangle AOB$ 中，$OA^2+OB^2=AB^2$.

∵ $AC=24$ cm，

∴ $OA=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\times 24=12$（cm）.

又∵ $AB=13$ cm，

∴ $OB=\sqrt{AB^2-OA^2}=\sqrt{13^2-12^2}=5$（cm）.

∴ $S_{菱形ABCD}=4S_{Rt\triangle AOB}=2OA\cdot OB=2\times 12\times 5=120$（$cm^2$）.

由例 3 可以知道，已知菱形的两条对角线可以直接计算菱形的面积，即菱形的面积等于其对角线乘积的一半.

如图 23-3-13，已知：在菱形 $ABCD$ 中，$\angle A=60°$，点 E、F 分别在边 AB、BC 上，$\angle EDF=60°$.

求证：$DE=DF$.

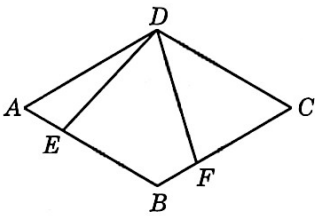


图 23-3-13

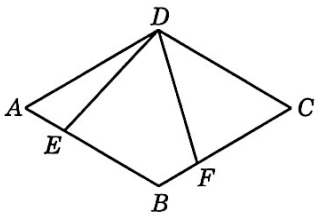


图 23-3-14

已知四边形 $ABCD$ 是一个菱形，且 $\angle A=60°$，由此想到，连接对角线 DB 后，可以得到两个等边三角形. 若要证明 $DE=DF$，只要证明它们分别所在的两个三角形全等即可.

如图 23-3-14，连接对角线 DB.

∵ 四边形 $ABCD$ 是一个菱形，

∴ $AD=AB$.

∴ $\angle ADB=\angle ABD$.

又∵ $\angle A=60°$,

∴ $\angle ADB=\angle ABD=60°$.

∴ $\triangle ADB$ 是一个等边三角形.

∴ $AD=BD$.

又∵ $\angle EDF=60°$,

∴ $\angle ADB=\angle EDF$.

∴ $\angle ADB-\angle EDB=\angle EDF-\angle EDB$.

∴ $\angle ADE=\angle BDF$.

∵ $AD/\!/BC$,

∴ $\angle DBF=\angle ADB=60°$.

又∵ $\angle A=60°$,

∴ $\angle DBF=\angle A$.

∴ $\triangle ADE\cong\triangle BDF$.

∴ $DE=DF$.

由菱形的定义可以判定一个四边形是菱形. 对于平行四边形而言，如果要判定它是一个菱形，那么它的边至少还要满足怎样的条件？

利用菱形的定义和平行四边形的性质，可以推出菱形的一个判定定理：

定理 1 有一组邻边相等的平行四边形是菱形.

如图 23-3-15，已知：在平行四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD$.

求证：平行四边形 $ABCD$ 是一个菱形.

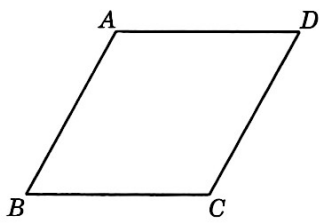


图 23-3-15

因为四边形 $ABCD$ 是一个平行四边形，由平行四边形的性质定理 1，得 $AB=CD$，$BC=$

AD. 又因为 $AB=AD$，所以 $AB=CD=BC=AD$. 根据菱形的定义，得平行四边形 $ABCD$ 是一个菱形.

仅有三条边相等的四边形一定是菱形吗?

如果一个平行四边形是菱形，那么它的对角线互相垂直. 这个命题的逆命题也是真命题. 由此，又得到菱形的一个判定定理：

定理 2 对角线互相垂直的平行四边形是菱形.

如图 23-3-16，已知：在平行四边形 $ABCD$ 中，$AC\perp BD$.

求证：平行四边形 $ABCD$ 是一个菱形.

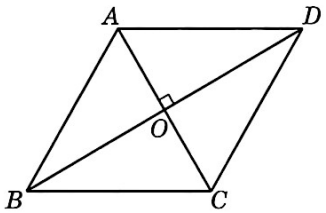


图 23-3-16

记 O 为对角线 AC、BD 的交点. 因为四边形 $ABCD$ 是一个平行四边形，由平行四边形的性质定理 3，得 $BO=DO$. 又因为 $AC\perp BD$，根据线段垂直平分线的性质定理，得 $AB=AD$. 进一步由菱形的判定定理 1，得平行四边形 $ABCD$ 是一个菱形.

如图 23-3-17，已知：EF 是平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 的垂直平分线，且分别与边 AD、BC 交于点 E、F，垂足为 O.

求证：四边形 $AFCE$ 是一个菱形.

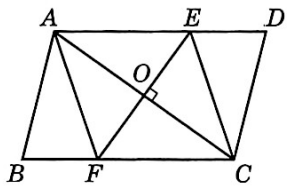


图 23-3-17

已知 $EF\perp AC$，所以要证四边形 $AFCE$ 是一个菱形，只要证明四边形 $AFCE$ 是一个平行四边形.

∵ 四边形 $ABCD$ 是一个平行四边形，

∴ $AE/\!/FC$.

∴ $\angle EAC=\angle ACF$.

∵ EF 垂直平分 AC，

∴ $AO=CO$，$\angle AOE=\angle COF=90°$.

∴ $\triangle AOE \cong \triangle COF$.

∴ $EO=FO$.

∴ 四边形 $AFCE$ 是一个平行四边形（对角线互相平分的四边形是平行四边形）.

又∵ $EF \perp AC$，

∴ 四边形 $AFCE$ 是一个菱形（对角线互相垂直的平行四边形是菱形）.

1. 填空题：

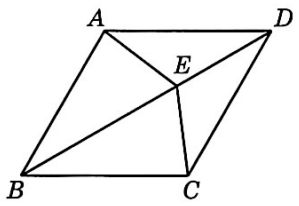
（1）矩形和菱形都具有的性质是_____；

（2）矩形具有而菱形不一定具有的性质是_____；

（3）菱形具有而矩形不一定具有的性质是_____.

2. 已知一个菱形的两条对角线的长分别是 12 和$6\sqrt{5}$，求它的面积.

3. 如图，已知：在四边形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$AD=CD$，E 是对角线 BD 上一点，且 $EA=EC$. 求证：四边形 $ABCD$ 是一个菱形.



（第 3 题）

3. 正方形

定义 四个内角都是直角、四条边都相等的四边形叫作正方形.

因为正方形的四个内角都是直角，结合矩形的定义，可知正方形必为矩形. 另一方面，因为正方形的四条边都相等，由菱形的定义，可知正方形必为菱形. 所以正方形既是矩形又是菱形. 反过来，根据矩形的定义和菱形的定义，可知既是矩形又是菱形的四边形是正方形.

矩形、菱形、正方形的关系如图23-3-18 所示.

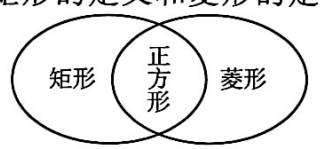


图 23-3-18

因为正方形既是矩形又是菱形，所以正方形具有矩形与菱形的所有性质.

证明：正方形的两条对角线把这个正方形分成四个全等的等腰直角三角形.

如图 23-3-19，已知：四边形 $ABCD$ 是一个正方形，对角线 AC、BD 相交于点 O.

求证：$\triangle ABO$、$\triangle BCO$、$\triangle CDO$、$\triangle DAO$ 是全等的等腰直角三角形.

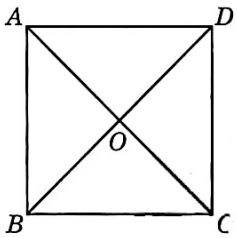


图 23-3-19

∵ 四边形 $ABCD$ 是一个正方形，

∴ $AC=BD$（矩形的两条对角线相等），

$OA=OC=\frac{1}{2}AC$，$OB=OD=\frac{1}{2}BD$（平行四边形的对角线互相平分）.

∴ $OA=OC=OB=OD$.

∵ 四边形 $ABCD$ 是一个正方形，

∴ $AC\perp BD$（菱形的两条对角线互相垂直）.

∴ $\angle AOB=\angle BOC=\angle COD=\angle DOA=90°$.

∴ $\triangle ABO$、$\triangle BCO$、$\triangle CDO$、$\triangle DAO$ 都是等腰直角三角形.

根据“边角边”，得$\triangle ABO\cong\triangle BCO\cong\triangle CDO\cong\triangle DAO$.

正方形是轴对称图形吗？如果是，它的对称轴有几条？

反过来，要判定一个四边形是正方形，可以判定其既是矩形又是菱形.

如图 23-3-20，已知：E、F、M、N 分别是正方形 $ABCD$ 四条边上的点，$AE=BF=CM=DN$.

求证：四边形 $EFMN$ 是一个正方形.

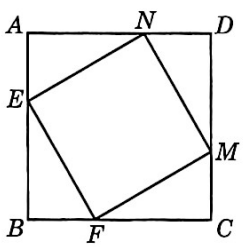


图 23-3-20

∵ 四边形 $ABCD$ 是一个正方形，

∴ $AB=BC=CD=DA$.

∵ $AE=BF=CM=DN$，$BE=AB-AE$，$CF=BC-BF$，$DM=CD-CM$，$AN=AD-DN$，

∴ $BE=CF=DM=AN$.

又∵ $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90°$，

∴ $\triangle BEF\cong\triangle CFM\cong\triangle DMN\cong\triangle ANE$.

∴ $EF=FM=MN=NE$.

∴ 四边形 $EFMN$ 是一个菱形.

∵ $\triangle BEF\cong\triangle CFM$，

∴ $\angle BEF=\angle CFM$.

∵ $\angle BEF+\angle BFE=180°-\angle B=90°$，

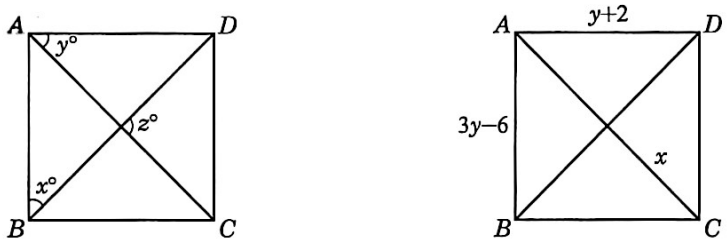
∴ $\angle CFM+\angle BFE=90°$.

∴ $\angle EFM=90°$.

∴ 四边形 $EFMN$ 是一个矩形（有一个内角是直角的平行四边形是矩形）.

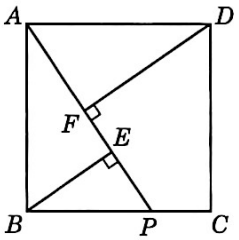
∴ 四边形 $EFMN$ 是一个正方形（既是矩形又是菱形的四边形是正方形）.

1. 根据图形求出相应的 x、y、z 的值（两个图形都是正方形，第 2 个图形中的 x 表示正方形对角线一半的长）：

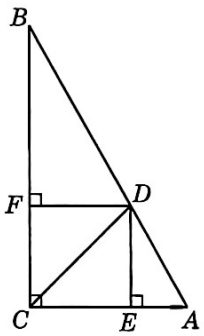


（第 1 题）

2. 如图，已知：在正方形 $ABCD$ 中，P 是边 BC 上一点，$BE \perp AP$，$DF \perp AP$，垂足分别为 E、F. 求证：$EF = DF - BE$.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，已知：在$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB = 90°$，CD 平分$\angle ACB$，$DE \perp AC$，$DF \perp BC$，垂足分别为 E、F. 求证：四边形 $CEDF$ 是一个正方形.

习题 23.3

1. 填空(将序号填写在相应的横线上)：

分析下列图形：①平行四边形(非矩形、菱形)，②矩形(非正方形)，③菱形(非正方形)，④正方形.

(1) 必然是中心对称图形的有_____；

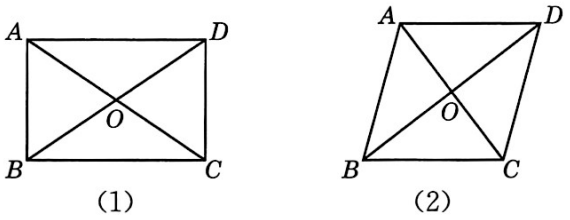
(2) 必然是轴对称图形的有_____；

(3) 必然满足对角线互相垂直平分的有_____；

(4) 必然满足对角线互相平分且相等的有_____；

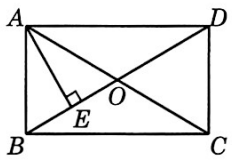
(5) 必然满足对角线互相垂直平分且相等的有_____.

2. 如图(1)，矩形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 相交于点 O，试找出图中相等的线段与相等的角. 如图(2)，菱形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 相交于点 O，试找出图中相等的线段与相等的角.

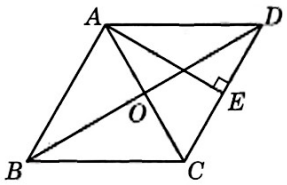


（第 2 题）

3. 如图，矩形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 相交于点 O，AE 垂直且平分线段 BO，垂足为 E，$BD=15$ cm. 求 AC、AB 的长.



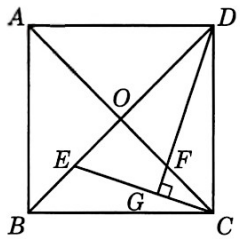
（第 3 题）



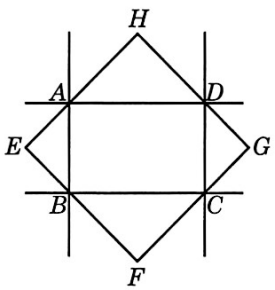
（第 4 题）

4. 如图，菱形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 相交于点 O，AE 垂直且平分边 CD，垂足为 E. 求 $\angle BCD$ 的度数.

5. 如图，已知：正方形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 相交于点 O，E 是 OB 上一点，$DG\perp CE$，垂足为 G，DG 与 OC 相交于点 F. 求证：$OE=OF$.



（第 5 题）



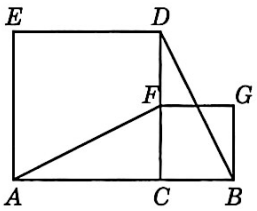
（第 6 题）

6. 如图，已知：矩形 $ABCD$ 的外角的平分线分别交于点 E、F、G、H. 求证：四边形 $EFGH$ 是一个正方形.

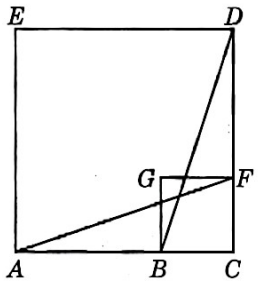
B

7. 如图(1)，已知 C 是线段 AB 上一点，分别以 AC、BC 为边，在线段 AB 的同侧作正方形 $ACDE$ 和正方形 $CBGF$，分别连接 AF、BD. AF 与 BD 是否相等？为什么？

思考：如图(2)，如果点 C 在线段 AB 的延长线上，那么 AF 与 BD 是否相等？请说明理由.



(1)

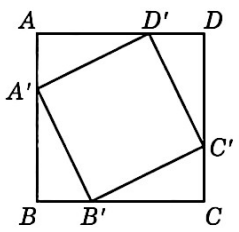


(2)

(第 7 题)

8. 有一块正方形的草地，要在上面修建两条交叉的宽度相同的笔直小路，使得这两条小路将草地分成的四个部分面积相等，你有多少种方法？与你的同学交流一下.

9. 如图，已知：点 A'、B'、C'、D' 分别在正方形的边 AB、BC、CD、DA 上，且 $AA'=BB'=CC'=DD'$.



(第 9 题)

(1) 当 $AA'=\frac{1}{2}AB$ 时，四边形 $A'B'C'D'$ 的面积是正方形 $ABCD$ 面积的几分之几？

(2) 当点 A'、B'、C'、D' 处在什么位置时，四边形 $A'B'C'D'$ 的面积是正方形 $ABCD$ 面积的 $\frac{5}{9}$？请写出计算过程.

在研究四边形时，通常会把它转化为三角形的问题，并利用三角形来研究四边形的有关问题. 现在我们学习了平行四边形，反过来，也可以利用平行四边形来研究三角形的有关问题.

任意画一个$\triangle ABC$，然后分别取边AB、AC的中点D、E，连接DE. 通过观察或测量等方法，你发现DE与BC之间有怎样的位置关系？有怎样的数量关系？据此，你能得到什么结论？

连接三角形两边中点的线段叫作**三角形的中位线**. 如图 23-4-1，在$\triangle ABC$中，D、E分别是边AB、AC的中点，于是线段DE就是$\triangle ABC$的一条中位线. 每一个三角形有三条中位线.

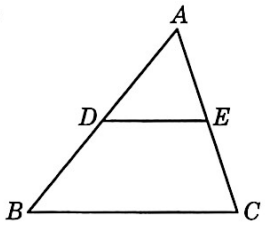


图 23-4-1

三角形的中位线定理 三角形的中位线平行于三角形的第三边，并且等于第三边的一半.

如图 23-4-1，已知：在$\triangle ABC$中，D、E分别是边AB、AC的中点.

求证：$DE \parallel BC$，且$DE=\frac{1}{2}BC$.

考虑延长DE到点F，使得$EF=DE$，这时$\triangle ADE \cong \triangle CFE$. 于是，证明$DE \parallel BC$且$DE=\frac{1}{2}BC$可转化为证明$DF \parallel BC$且$DF=BC$. 这只需要证明四边形$BCFD$是一个平行四边形即可.

如图 23-4-2，延长DE到点F，使得$EF=DE$，连接FC. 因为$AE=EC$，$\angle AED=\angle CEF$，所以$\triangle ADE \cong \triangle CFE$. 由此推出$AD=CF$，$\angle A=\angle ECF$，所以$AB \parallel CF$，即$BD \parallel CF$. 又因为$AD=DB$，$AD=CF$，所以$DB=CF$. 由平行四边形的判定定理 2，得四

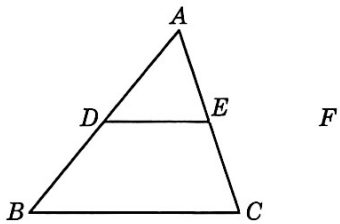


图 23-4-2

边形 $BCFD$ 是一个平行四边形，所以 $DF /\!/ BC$，且 $DF=BC$. 又因为 $DE=\frac{1}{2}DF$，所以 $DE /\!/ BC$，且 $DE=\frac{1}{2}BC$.

如图 23-4-3，已知：O 是$\triangle ABC$ 内任意一点，D、E、F、G 分别是OA、OB、BC、AC 的中点.

求证：四边形 $DEFG$ 是一个平行四边形.

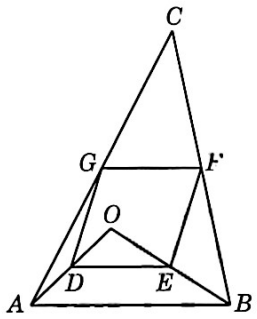


图 23-4-3

∵ F、G 分别是BC、AC 的中点，

∴ $GF /\!/ AB$，且$GF=\frac{1}{2}AB$（三角形的中位线定理).

同理，可得 $DE /\!/ AB$，且 $DE=\frac{1}{2}AB$.

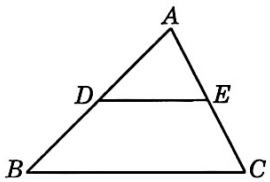
∴ $GF /\!/ DE$，且 $GF=DE$.

∴ 四边形 $DEFG$ 是一个平行四边形（一组对边平行且相等的四边形是平行四边形).

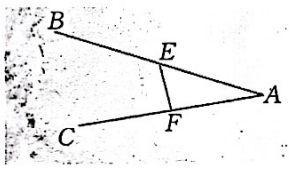
1. 填空：如图，在$\triangle ABC$ 中，D、E 分别是边 AB、AC 上的点，且 $AD=DB$，$AE=EC$.

(1) 如果 $BC=\sqrt{3}$，那么 $DE=$_____；

(2) 如果 $DE=5$，那么 $BC=$_____.



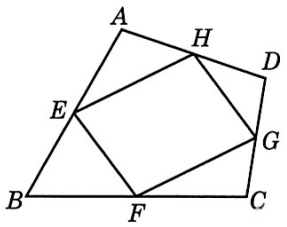
(第 1 题)



(第 2 题)

2. 如图，B、C 两点被海水隔开，在 B、C 外选择一点 A，找到 AB、AC 的中点 E、F，测得 $EF=22$ m，这样就能求出 B、C 两点间的距离. 请说明理由.

3. 如图，已知：在四边形 $ABCD$ 中，E、F、G、H 分别是边 AB、BC、CD、AD 的中点. 求证：四边形 $EFGH$ 是一个平行四边形.



（第 3 题）

任意一个三角形的三条角平分线相交于一点，三条边的垂直平分线也相交于一点. 试问：任意一个三角形的三条中线是否也相交于一点？它又有怎样的性质呢？

任意一个三角形都有三条中线. 如图 23-4-4，已知 BD、CE 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AC、AB 上的中线，它们交于点 O，连接 AO 并延长交边 BC 于点 F.

AF 是边 BC 上的中线吗？线段 AO 与线段 OF 有怎样的数量关系？线段 CO 与线段 OE 呢？线段 BO 与线段 OD 呢？据此，你能得到什么结论？

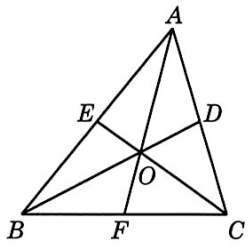


图 23-4-4

如图 23-4-4，已知：在 $\triangle ABC$ 中，BD、CE 分别是边 AC、AB 上的中线，BD 和 CE 交于点 O，连接 AO 并延长交边 BC 于点 F.

求证：AF 是边 BC 上的中线.

如图 23-4-5，延长 AF 到点 G，使 $OG=AO$，分别连接 BG、CG.

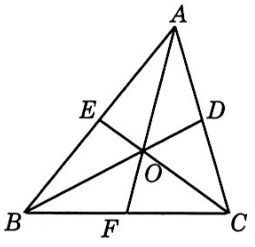


图 23-4-5

$\because$ $EB=EA$，$OG=AO$，

$\therefore$ $EO /\!/ BG$（三角形的中位线定理）.

$\therefore$ $OC /\!/ BG$.

同理，可得 $OB /\!/ CG$.

∴ 四边形 $BGCO$ 是一个平行四边形.

∴ $BF=FC$（平行四边形的对角线互相平分），

∴ AF 是边 BC 上的中线.

本题的结论表明：三角形的三条中线交于一点，此交点叫作三角形的重心.

取一块质地均匀的三角形硬纸片，在三条中线的交点处用细绳将其挂住，该硬纸片将会保持水平，这说明整个三角形硬纸片所受重力的合力可视为集中作用在此点，“重心”因而得名.

三角形重心定理 三角形的重心到一个顶点的距离等于它到该顶点对边中点的距离的两倍.

如图 23-4-6，已知：在△ABC 中，AF、BD、CE 分别是边 BC、AC、AB 上的中线，并交于点 O.

求证：$AO=2OF$.

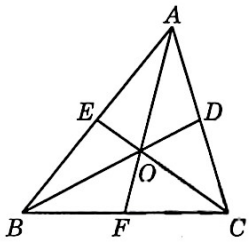


图 23-4-6

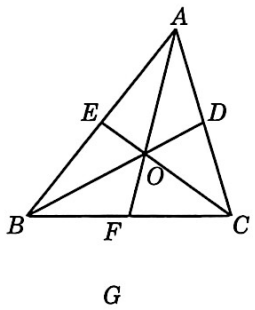


图 23-4-7

如图 23 4 7，延长 AF 到点 G，使 $OG=AO$，分别连接 BG、CG. 在例 2 中已经证明了四边形 $BGCO$ 是一个平行四边形，所以 $OG=2OF$. 又因为 $OG=AO$，所以 $AO=2OF$.

如图 23-4-8，已知：在△ABC 中，O 是△ABC 的重心，分别连接 OA、OB 和 OC.

求证：$S_{\triangle OAB}=S_{\triangle OBC}=S_{\triangle OAC}$.

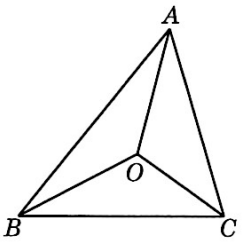


图 23-4-8

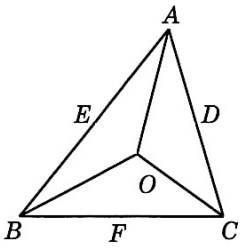


图 23-4-9

如图 23-4-9，延长 CO、BO 和 AO，与边 AB、AC、BC 分别交于点 E、D、F.

∵ O 是△ABC 的重心，

∴ F 是边 BC 的中点.

∴ $BF=FC$.

∴ $S_{\triangle OBF}=S_{\triangle OCF}=\frac{1}{2}S_{\triangle OBC}$.

∵ O 是△ABC 的重心，

∴ $AO=2OF$（三角形重心定理）.

∴ $S_{\triangle OAB}=2S_{\triangle OBF}$，$S_{\triangle OAC}=2S_{\triangle OCF}$.

∴ $S_{\triangle OAB}=S_{\triangle OBC}=S_{\triangle OAC}$.

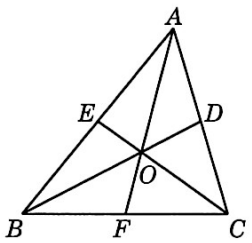
为什么可以得到 $S_{\triangle OBF}=S_{\triangle OCF}=\frac{1}{2}S_{\triangle OBC}$，$S_{\triangle OAB}=2S_{\triangle OBF}$，$S_{\triangle OAC}=2S_{\triangle OCF}$？

1. 填空：如图，已知 O 是△ABC 的重心.

(1) $AB=2$_____$=2$_____；

(2) $BF=$_____$=\frac{1}{2}$_____；

(3) $S_{\triangle OAD}=$_____$=\frac{1}{2}$_____.



（第 1 题）

2. 在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$AB=24$，G 是△ABC 的重心，连接 CG 并延长，交边 AB 于点 D. 求 DG 的长.

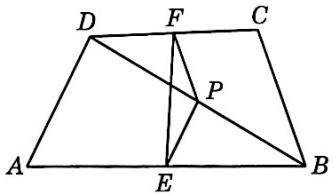
3. 在△ABC 中，$AB=AC=17$，$BC=16$，G 是△ABC 的重心.

(1) 求 AG 的长；

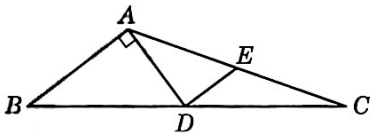
(2) 求 $S_{\triangle GBC}$.

习题 23.4

1. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，P 是对角线 BD 的中点，E、F 分别是边 AB、CD 的中点，$AD=BC$，$\angle PEF=23^\circ$. 求$\angle PFE$ 的度数.



(第 1 题)

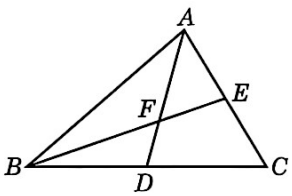


(第 2 题)

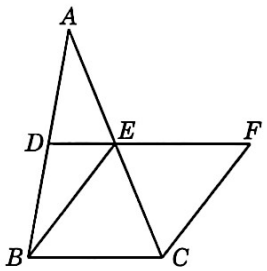
2. 如图，在△ABC 中，D、E 分别是边 BC、AC 的中点，$AD\perp AB$，垂足为 A，$AB=6$，$AD=4$. 求 AC 的长.

3. 已知 G 是面积为 27 cm^2的△ABC 的重心，那么△AGC 的面积是多少?

4. 如图，△ABC 的中线 AD、BE 相交于点 F. 若△ABF 的面积是 4，求四边形 $FDCE$ 的面积.



(第 4 题)



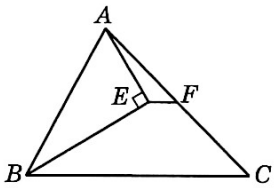
(第 5 题)

5. 如图，已知：在△ABC 中，D、E 分别是边 AB、AC 的中点，延长

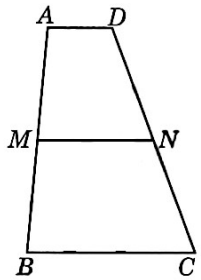
DE 到点 F，使 $EF=2DE$. 求证：四边形 $BCFE$ 是一个平行四边形.

B

6. 如图，已知：在△ABC 中，$\angle ABE=\angle EBC$，$AE\perp BE$，垂足为 E，F 是边 AC 的中点. 求证：$EF=\frac{1}{2}(BC-AB)$.



（第 6 题）

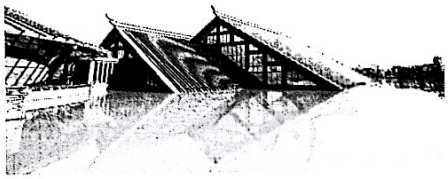


（第 7 题）

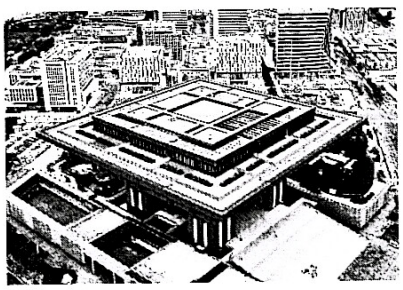
7. 如图，已知：在梯形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，$AD<BC$，$AM=MB$，$DN=NC$. 求证：$MN\parallel BC$，且 $MN=\frac{1}{2}(AD+BC)$.

几何形态是人类建筑最早的构造形式，无论是古埃及的金字塔、古希腊的帕提农神庙，还是中国的万里长城，都蕴含着丰富的几何形态. 现代主义建筑作品中也大量使用了几何形态.

几何形态的构思设计在上海的建筑里也有很好的呈现. 有着“上海之根，海派之源”之称的广富林文化遗址公园，三角形屋面建筑群倒映湖中，形成美轮美奂的菱形镜像. 坐落在浦江之滨的中华艺术宫，采用逐层出挑的梯形设计. 俯瞰中华艺术宫，其外框呈一个大正方形，大正方形里包含五个小正方形——中心的一个和四个角上的各一个，这五个正方形对应了五个展厅.

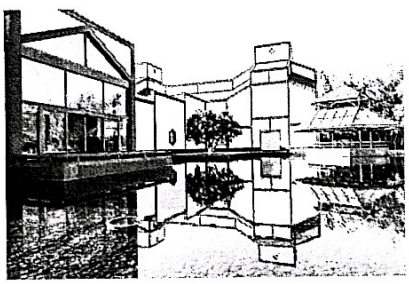


广富林文化遗址公园



中华艺术宫

中国工程院外籍院士、建筑大师贝聿铭设计的苏州博物馆带有丰富的几何元素. 从建筑结构看. 现代几何体构成的坡顶隐含着苏州古建筑传统的斜坡屋顶的基本概念，三角形、正方形不断地出现与重构. 大厅位于入口处庭院与山水主庭院之间，大小正方形和三角形的屋顶框架线与几何形的吊灯交错在一起，构成了



苏州博物馆

一道错综复杂的视觉谜题. 设计师对于博物馆内的摆设也做了精心的设计，甚至连灯具也是由简单的几何体组成的. 这些强烈的现代几何形态和中国传统园林的雅致意味巧妙融合，相得益彰.

1. 基本概念：多边形，梯形，平行四边形，矩形，菱形，正方形.

2. 多边形：

多边形的内角和定理：n 边形的内角和等于$(n-2)\cdot 180°$.

多边形的外角和定理：多边形的外角和等于 360°.

3. 平行四边形：

(1) 两组对边分别平行的四边形叫作平行四边形.

(2) 平行四边形的性质定理：

平行四边形的对边相等；

平行四边形的对角相等；

平行四边形的对角线互相平分.

(3) 平行四边形的判定定理：

两组对边分别相等的四边形是平行四边形；

一组对边平行且相等的四边形是平行四边形；

对角线互相平分的四边形是平行四边形.

4. 矩形：

(1) 四个内角都是直角的四边形叫作矩形.

(2) 矩形的性质定理：矩形的两条对角线相等.

(3) 矩形的判定定理：

有一个内角是直角的平行四边形是矩形；

对角线相等的平行四边形是矩形.

5. 菱形：

(1) 四条边都相等的四边形叫作菱形.

(2) 菱形的性质定理：菱形的两条对角线互相垂直.

(3) 菱形的判定定理：

有一组邻边相等的平行四边形是菱形；

对角线互相垂直的平行四边形是菱形.

6. 正方形：

(1) 四个内角都是直角、四条边都相等的四边形叫作正方形.

(2) 正方形既是矩形又是菱形.

(3) 既是矩形又是菱形的四边形是正方形.

7. 中位线与重心：

(1) 三角形的中位线定理：三角形的中位线平行于三角形的第三边，并且等于第三边的一半.

(2) 三角形的三条中线交于一点，此交点叫作三角形的重心.

(3) 三角形重心定理：三角形的重心到一个顶点的距离等于它到该顶点对边中点的距离的两倍.

1. 选择题：

(1) 如果一个多边形的边数增加 1，那么它的内角和 (　　)

A. 不变；　　B. 增加 1°；

C. 增加 180°；　　D. 增加 360°.

(2) 若一个多边形的内角和是它的外角和的 2 倍，则这个多边形的边数为 (　　)

A. 4；　　B. 5；　　C. 6；　　D. 7.

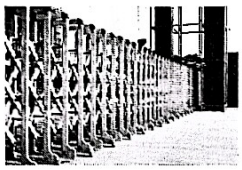
(3) 如图所示的伸缩门，其原理是 (　　)

A. 三角形的稳定性；

B. 四边形的不稳定性；

C. 两点之间线段最短；

D. 两点确定一条直线.



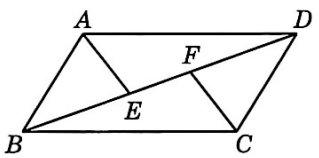
(第 1(3)题)

2. 填空题：

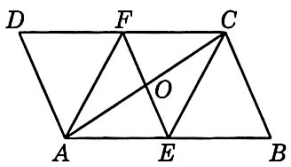
(1) 已知矩形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 相交于点 O，$\triangle OAB$ 是等边三角形. 如果 $AB=4$ cm，那么矩形 $ABCD$ 的面积是_____cm^2；

(2) 已知菱形的两条对角线的长分别是 6 和 8，那么它的周长和面积分别等于_____和_____.

3. 如图，已知：在 $\square ABCD$ 中，E、F 为对角线 BD 上两点，且 $\angle BAE=\angle DCF$. 求证：$BF=DE$.



(第 3 题)

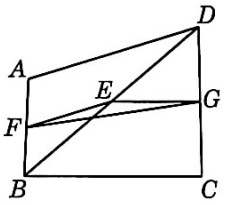


(第 4 题)

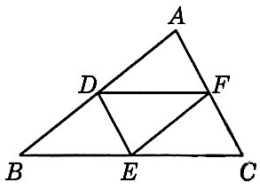
4. 如图，已知：在四边形 $ABCD$ 中，$AD/\!/BC$，E、F 分别是边 AB、

CD 上的点，$OA=OC$，$OE=OF$. 求证：四边形 $ABCD$ 是一个平行四边形.

5. 如图，已知：在四边形 $ABCD$ 中，AD 与 BC 不平行，$AD=BC$，E、F、G 分别是线段 BD、AB、DC 的中点，分别连接 EF、EG 和 FG. 求证：$\triangle EFG$ 是一个等腰三角形.



（第 5 题）



（第 6 题）

6. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，D、E、F 分别是边 AB、BC、CA 的中点.

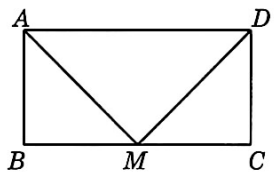
（1）如果 $AB=8$，$BC=9$，$AC=6$，求 $\triangle DEF$ 的周长；

（2）如果 $\angle A=78°$，求 $\angle DEF$ 的度数；

（3）如果 $\triangle DEF$ 的面积为 8，求 $\triangle ABC$ 的面积.

7. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90°$，$AB=5$，$AC=12$，G 是 $\triangle ABC$ 的重心，连接 AG. 求 AG 的长.

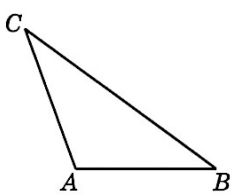
8. 如图，已知：M 是矩形 $ABCD$ 的边 BC 的中点，$BC=2AB$. 求证：$MA\perp MD$.



（第 8 题）

9. 已知菱形的一条边与它的两条对角线所成的两个角的度数之比为 3∶2，求这个菱形的各个内角的度数.

10. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，问：边 BC 上是否存在点 P，过点 P 分别作 AB 和 AC 的平行线，分别交边 AC、AB 于点 D、E，使四边形 $AEPD$ 为菱形？如果不存在，请说明理由；如果存在，作出点 P（保留作图痕迹），并加以证明.



（第 10 题）

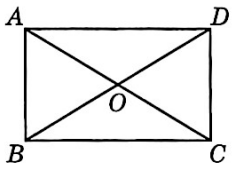
B

11. 如图，四边形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 相交于点 O，给出下列六个条件：

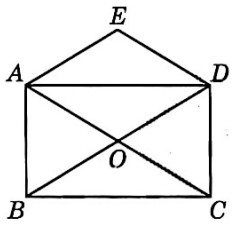
① $AB/\!/DC$；　② $AB=DC$；　③ $AC=BD$；

④ $\angle ABC=90°$；⑤ $OA=OC$；　⑥ $OB=OD$.

请从中选取 3 个条件，使四边形 $ABCD$ 为矩形，并加以证明.



（第 11 题）



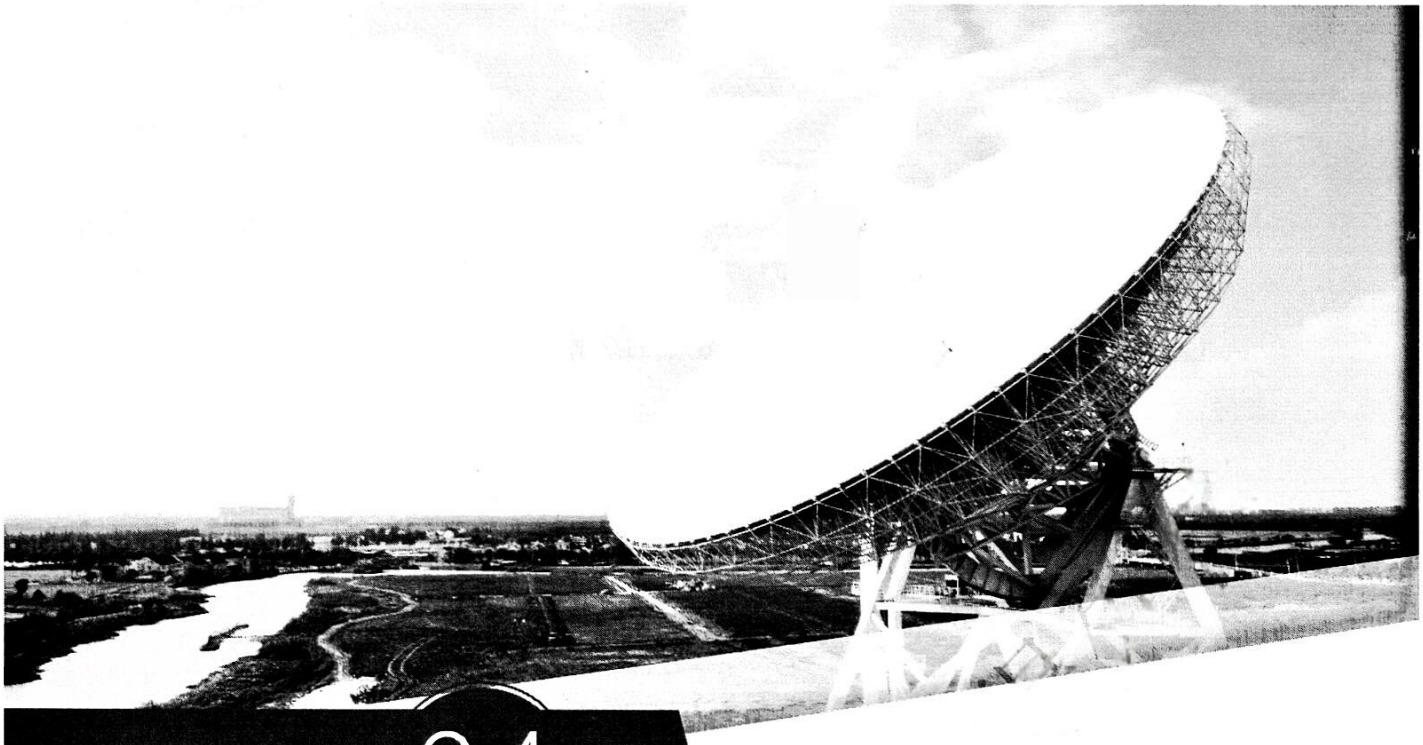
（第 12 题）

12. 如图，已知：矩形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 相交于点 O，$DE/\!/CA$，$AE/\!/BD$.

（1）求证：四边形 $AODE$ 是一个菱形.

（2）如果将条件中的“矩形 $ABCD$”改为“菱形 $ABCD$”，其余条件不变，那么四边形 $AODE$ 是一个怎样的四边形？请给出说明.

13. 用纸板剪成的两个全等三角形能够拼成什么四边形？要想拼成一个矩形，需要两个什么样的全等三角形？要想拼成菱形或正方形呢？动手剪一剪，拼一拼，并说明理由.



第24章

平面直角坐标系

平面直角坐标系由平面上两条互相垂直且有公共原点的数轴组成. 本章将通过建立平面直角坐标系，用坐标表示点的位置，用坐标表达简单图形；学习用坐标计算两点间的距离；体会用坐标的变化来刻画点的变换，如平移与轴对称. 用数来表示位置是数学中一个具有突破性的思想，它架起了数与形之间的桥梁.

通过本章的学习，可以更好地感受坐标在表示点的位置、表达简单图形时的作用，进一步理解图形与数量之间的联系，为下一步在平面直角坐标系中用函数图像表达函数关系打下基础.

1. 平面直角坐标系的引入

在生活中，常常需要确定位置. 例如，在电影院里寻找自己的座位，在围棋棋盘上确定某个棋子的位置，在一个队伍方阵中明确某个成员的位置等.

在数学中，有什么方法可以确定平面上一个点的位置呢?

回顾确定直线上一个点的位置的方法，在直线上规定原点、正方向和单位长度，就得到了一条数轴. 数轴上的点与实数是一一对应的. 所以利用数轴，可以用一个实数来确定直线上一个点的位置.

如何确定平面上一个点的位置? 先来看一个生活中的例子. 看电影时根据电影票上的信息“4 排 5 座”(图 24-1-1)，能确定这个座位在影院放映厅中的位置，这个座位可以用(4,5)表示. 事实上，放映厅里每个座位都可以用一个由两个正整数组成的数对来表示. 此外，不同顺序的数对(4,5)与(5,4)表示的座位不同，像这样的数对叫作有序数对. 由此联想，是否可以用一个由两个实数组成的有序数对(a,b)来确定平面上一个点的位置呢?

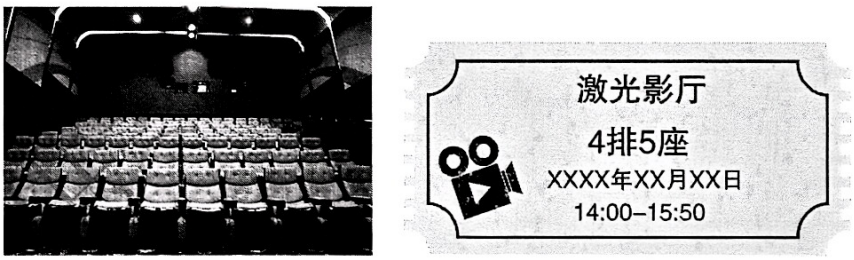


图 24-1-1

参照利用数轴确定直线上点的方法，我们在平面上画两条互相垂直且有公共原点的数轴，建立一个直角坐标系. 这两条数轴称为坐标轴，通常分别记为 x 轴与 y 轴. 这两条数轴的公共原点称为该坐标系的原点，通常记为 O. 坐标系记作平面直角坐标系 xOy，如图 24-1-2 所示.

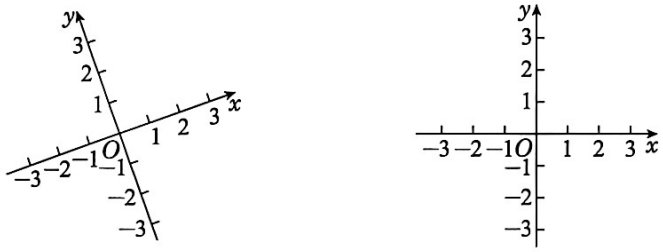


图 24-1-2

平面上两条互相垂直的数轴确定了平面直角坐标系. 习惯上，分别在水平和竖直方向画出这两条坐标轴，如图 24-1-2(2)所示. 水平方向的坐标轴称为横轴，记作 x 轴，正方向向右；竖直方向的坐标轴称为纵轴，记作 y 轴，正方向向上. 如无特别说明，两条坐标轴的单位长度是一致的.

有了平面直角坐标系，平面上任意给定的点就可以用一个有序数对来表示了. 例如，图 24-1-3 中，过点 A 分别向 x 轴和 y 轴作垂线，垂足 A_1 在 x 轴上所对应的数是 3，垂足 A_2 在 y 轴上所对应的数是 2.5. 因为平面上经过一点有且只有一条直线垂直于已知直线，所以点 A_1、A_2 是由点 A 唯一确定的，从而点 A_1、A_2 分别所对应的数 3、2.5 也是唯一确定的. 把点 A_1 所对应的数 3 写在前，点 A_2 所对应的数 2.5 写在后，组成有序数对(3,2.5). 在此平面直角坐标系中，(3,2.5)就表示点 A.

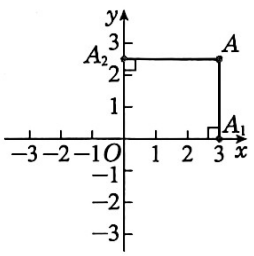


图 24-1-3

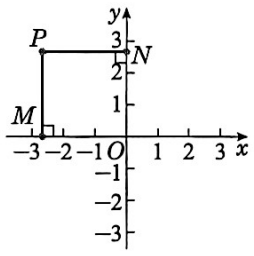


图 24-1-4

一般地，对于平面直角坐标系中任意给定的一点 P，如图 24-1-4，过点 P 作 x 轴的垂线，垂足为 M，点 M 在 x 轴上所对应的数为 a；过点 P 作 y 轴的垂线，垂足为 N，点 N 在 y 轴上所对应的数为 b，有序数对

(a,b)就表示点 P. 这样的有序数对是由点 P 唯一确定的. 反过来，任意给定有序数对(a,b)，可在 x 轴上描出数 a 所对应的点 M，在 y 轴上描出数 b 所对应的点 N；过点 M 作 x 轴的垂线，过点 N 作 y 轴的垂线，这两条垂线的交点 P 就表示有序数对(a,b)，这样的点也是唯一确定的. 于是，给定平面直角坐标系，平面上的每一个点都有唯一的有序数对与之对应；反过来，对于任意给定的有序数对，平面上都有唯一的点与之对应. 所以，给定平面直角坐标系，平面上的点与有序数对是一一对应的.

要注意的是，平面上可以建立不同的直角坐标系，同一个点在不同坐标系中所对应的有序数对可能是不同的.



在同一平面直角坐标系中，有序数对(a,b)与(b,a)表示同一个点吗?

在平面直角坐标系 xOy 中，点 P 所对应的有序数对(a,b)叫作点 P 的坐标，记作“$P(a,b)$”，其中 a 叫作横坐标，b 叫作纵坐标.

建立了平面直角坐标系后，两个坐标轴将平面(除了坐标轴)按照横坐标与纵坐标的符号分成四个部分：(正,正)、(负,正)、(负,负)、(正,负)，每个部分称为一个象限，依次记为第一象限、第二象限、第三象限、第四象限，如图 24-1-5 所示. 坐标轴上的点不属于任何象限.

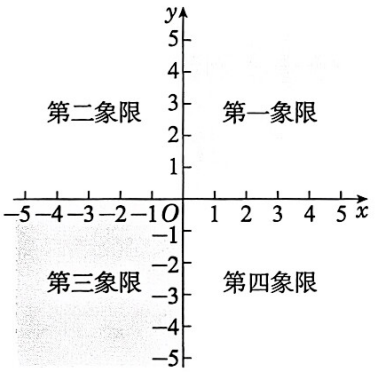


图 24-1-5

写出平面直角坐标系(图 24-1-6)中各点的坐标.

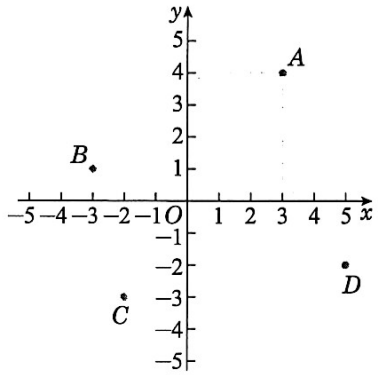


图 24-1-6

如图 24-1-6，过点 A 作 x 轴的垂线，垂足在 x 轴上所对应的数是 3；过点 A 作 y 轴的垂线，垂足在 y 轴上所对应的数是 4. 所以点 A 的坐标是(3,4).

向 x 轴作垂线确定横坐标，向 y 轴作垂线确定纵坐标.

同理，点 B 的坐标是(−3,1)；点 C 的坐标是(−2,−3)；点 D 的坐标是(5,−2).

在平面直角坐标系(图 24-1-7)中描出下列各点：

$A(2.5,-5)$、$B(4,3)$、$C(-3,1)$、$D(-4,-2)$、$E(0,4)$.

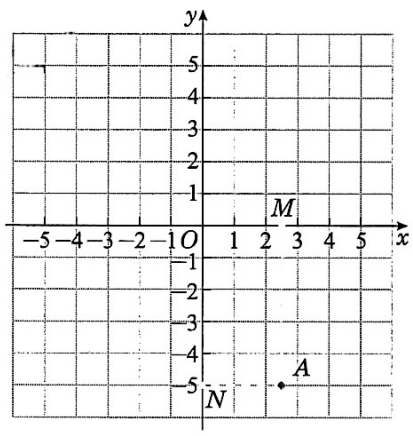


图 24-1-7

如图 24-1-7，在 x 轴上找出 2.5 所对应的点 M，在 y 轴上找出 −5 所对应的点 N. 过点 M 作 x 轴的垂线，过点 N 作 y 轴的垂线，这两条垂线的

交点就是 A.

类似地，请你在图 24-1-7 中描出点 B、C、D、E.

1. 填空题：

(1) 第_____象限内的点的横坐标和纵坐标都是负数；

(2) 第_____象限内的点的横坐标和纵坐标异号；

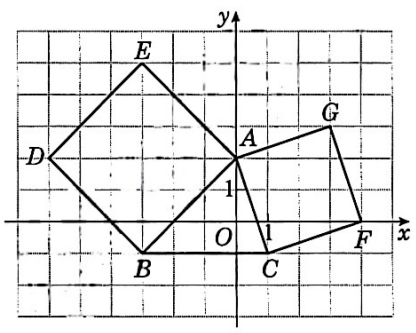
(3) 点 $A(-2,3)$ 在第_____象限，到 x 轴的距离为_____，到 y 轴的距离为_____；

(4) 点 $B(0,-4)$ 在_____轴上，到 x 轴的距离为_____，到 y 轴的距离为_____.

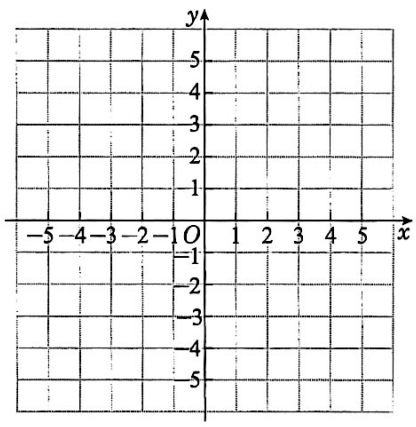
2. 写出图中各点的坐标：

A _____、B _____、C _____、D _____、

E _____、F _____、G _____.



(第 2 题)



(第 3 题)

3. 在如图所示的平面直角坐标系中描出下列各点：

$A(5,3)$、$B(-4,0)$、$C(-2,4)$、$D(3.5,-3)$、$E(-3,-2.5)$.

2. 简单图形的坐标表达

利用平面直角坐标系，可以表达平面上的简单图形，如可以用坐标表达坐标轴所在的直线. 为此，我们先讨论坐标轴上的点的坐标特征.

写出图 24-1-8 中坐标轴上的点 E、F 的坐标.

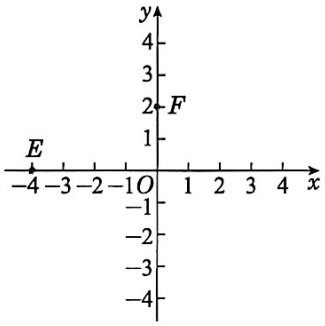


图 24-1-8

点 E 在 x 轴上所对应的数是 -4；过点 E 作 y 轴的垂线，垂足为 O，它在 y 轴上所对应的数是 0. 因此，点 E 的横坐标是 -4，纵坐标是 0，即点 E 的坐标是 $(-4,0)$.

用类似的方法，可得点 F 的坐标是 $(0,2)$.

在 x 轴上的点的纵坐标为 0；反之，纵坐标为 0 的点一定在 x 轴上. 因此，可以把 x 轴记为直线 $y=0$.

在 y 轴上的点的横坐标为 0；反之，横坐标为 0 的点一定在 y 轴上. 因此，可以把 y 轴记为直线 $x=0$.

平行于坐标轴的直线又如何表示呢？为此，我们讨论平行于坐标轴的直线上的点的坐标特征.

如图 24-1-9，经过点 $A(2,3)$ 分别作 x 轴的平行线 AM 和 y 轴的平行线 AN，它们与坐标轴的交点分别是 M、N. 直线 AM 上的点的坐标有什么特征？直线 AN 上的点的坐标又有什么特征呢？

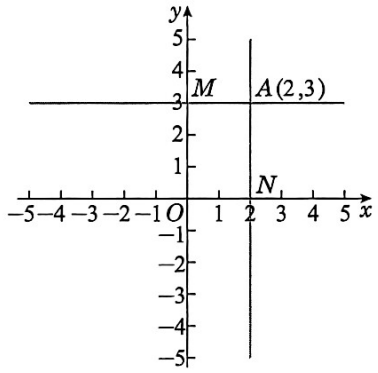


图 24-1-9

过直线 AM 上任意给定一点作 y 轴的垂线，垂足都是 M，所以直线 AM 上的点的纵坐标都是 3，横坐标可以是任意实数；反之，纵坐标为 3 的点一定在直线 AM 上. 因此，直线 AM 可记为直线 $y=3$.

同理，直线 AN 上的点的横坐标都是 2，纵坐标可以是任意实数；反之，横坐标为 2 的点一定在直线 AN 上. 因此，直线 AN 可记为直线 $x=2$.

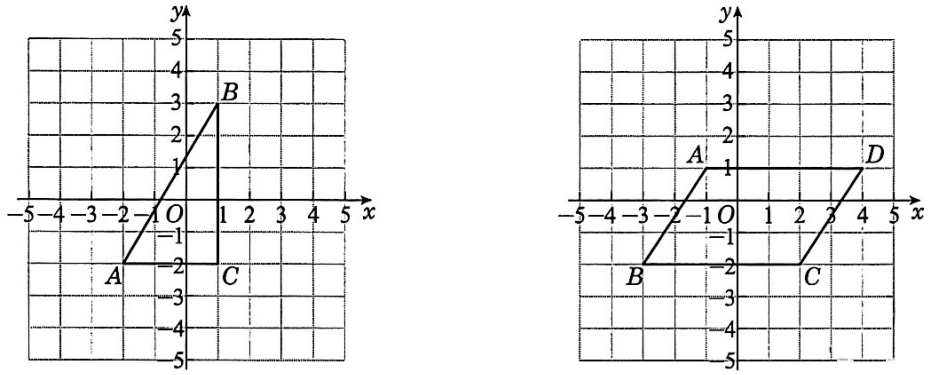
纵坐标等于 b 的点的全体是经过点 $A(0,b)$ 且平行于 x 轴的直线，它可记为直线 $y=b$；

横坐标等于 a 的点的全体是经过点 $A(a,0)$ 且平行于 y 轴的直线，它可记为直线 $x=a$.

在平面直角坐标系中，图形上的点都有相应的坐标，我们可以用坐标表示简单图形的顶点位置，进而确定该图形的形状和大小，用坐标来表达图形.

写出图 24-1-10 中两个图形各个顶点的坐标，指出它们分别是什么图形，并计算面积.

(1) $\triangle ABC$ 顶点的坐标分别是 $A(-2,-2)$、$B(1,3)$、$C(1,-2)$，因为点 A 与点 C 的纵坐标都是 -2，所以 $AC/\!/x$ 轴. 因为点 B 与点 C 的横坐标都是 1，所以 $BC/\!/y$ 轴. 于是 $AC\perp BC$. 从而 $\triangle ABC$ 是直角三角形，它的面积是 $\frac{1}{2}\times 3\times 5=\frac{15}{2}$.



(1)　　(2)

图 24-1-10

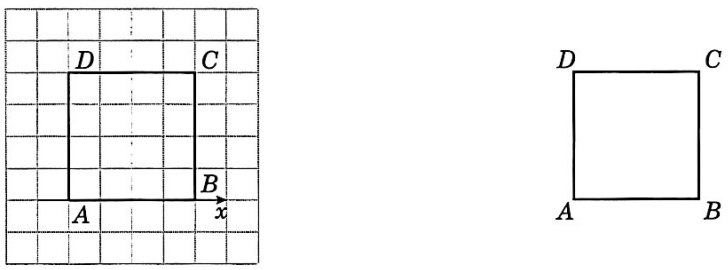
(2) 四边形 $ABCD$ 顶点的坐标分别是 $A(-1,1)$、$B(-3,-2)$、$C(2,-2)$、$D(4,1)$，因为点 A 与点 D 的纵坐标都是 1，所以 $AD \parallel x$ 轴. 因为点 B 与点 C 的纵坐标都是 -2，所以 $BC \parallel x$ 轴. 于是 $AD \parallel BC$. 又 $AD = BC = 5$，所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形，它的面积是 $5 \times 3 = 15$.

对于平面上的图形，有时需要建立合适的平面直角坐标系，用坐标来表达图形.

已知正方形 $ABCD$ 的边长为 4.

(1) 如果以 A 为原点，AB 所在直线为 x 轴，建立平面直角坐标系，那么 y 轴是哪条直线？在图 24-1-11(1)中画出 y 轴，标出单位长度，并写出正方形顶点 A、B、C、D 的坐标；

(2) 你还有其他建立平面直角坐标系的方法吗？在图 24-1-11(2)中画出你所建立的平面直角坐标系，并写出正方形顶点 A、B、C、D 的坐标.



(1)　　(2)

图 24-1-11

(1) y 轴是直线 AD，规定图中小方格的边长代表一个单位长度，那么建立的平面直角坐标系如图 24-1-12(1)所示，此时正方形顶点的坐标分别是 $A(0,0)$、$B(4,0)$、$C(4,4)$、$D(0,4)$.

(2) 有其他建立平面直角坐标系的方法. 例如，建立如图 24-1-12(2)所示的平面直角坐标系，此时正方形顶点的坐标分别是 $A(-2,-2)$、$B(2,-2)$、$C(2,2)$、$D(-2,2)$.

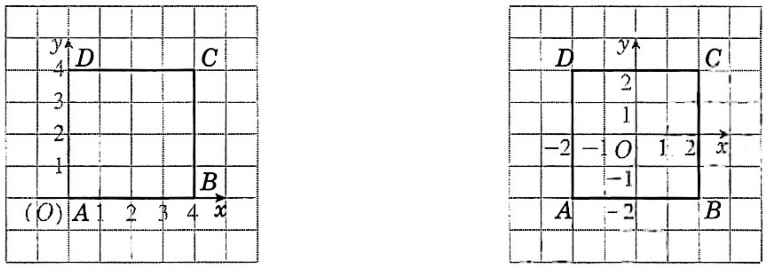


图 24-1-12

建立的平面直角坐标系不同，同一个图形的顶点坐标也可能不同，应根据具体情况建立合适的平面直角坐标系.

1. 填空题：

(1) 经过点 $P(0,1)$且平行于 x 轴的直线可记为直线_____；

(2) 经过点 $Q(1,-5)$且平行于 y 轴的直线可记为直线_____；

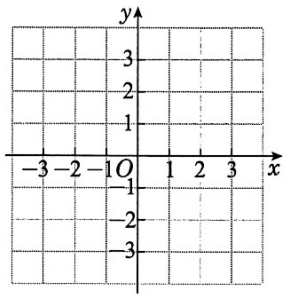
(3) 在平面直角坐标系中，已知点 $A(-1,3)$、$B(2,3)$，如果 M 为直线 AB 上任意给定的一点，那么点 M 的纵坐标为_____；

(4) 在平面直角坐标系中，已知点 $C(-4,1)$、$D(-4,-2)$，如果 N 为直线 CD 上任意给定的一点，那么点 N 的横坐标为_____.

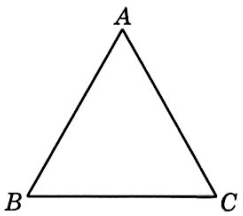
2. 已知四边形 $ABCD$ 顶点的坐标分别是 $A(-1,3)$、$B(-1,-2)$、$C(3,-2)$、$D(1,3)$.

(1) 在如图所示的平面直角坐标系中画出四边形 $ABCD$；

(2) 判断四边形 $ABCD$ 的形状，并计算它的面积.



(第 2 题)



(第 3 题)

3. 如图，等边三角形 ABC 的边长为 3，请建立一个平面直角坐标系，并写出等边三角形三个顶点 A、B、C 在这个平面直角坐标系中的坐标.

3. 物体位置的坐标表示

在实际生活中，我们还经常需要建立合适的平面直角坐标系，用坐标来描述物体的位置.

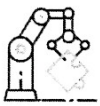


图 24-1-13 是学校与欢欢家位置的示意图，图中小方格的边长是 100 m. 请在图中建立平面直角坐标系，并写出学校与欢欢家的坐标.

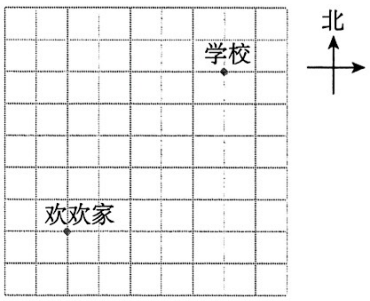


图 24-1-13

某游乐园的游览简图如图 24-1-14 所示，请建立一个平面直角坐标系，并用坐标表示各个主题园的位置.

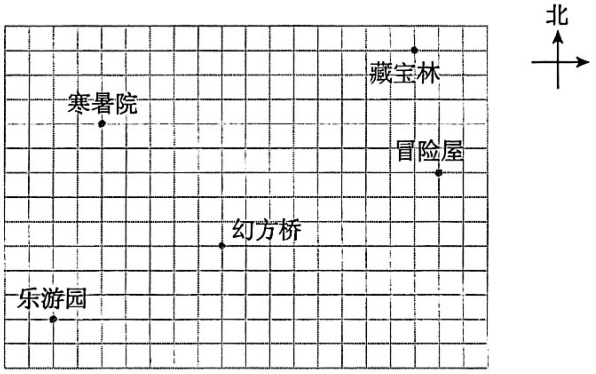


图 24-1-14

如图 24-1-15，现以“幻方桥”所在位置为原点，分别以正东、正北方向为 x 轴、y 轴正方向，规定简图中小方格的边长代表一个单位长度，建立平面直角坐标系. “幻方桥”的坐标为(0,0)，“冒险屋”的坐标为(9,3)，“藏宝林”的坐标为(8,8)，“寒暑院”的坐标为(−5,5)，“乐游园”的坐标为(−7,−3).

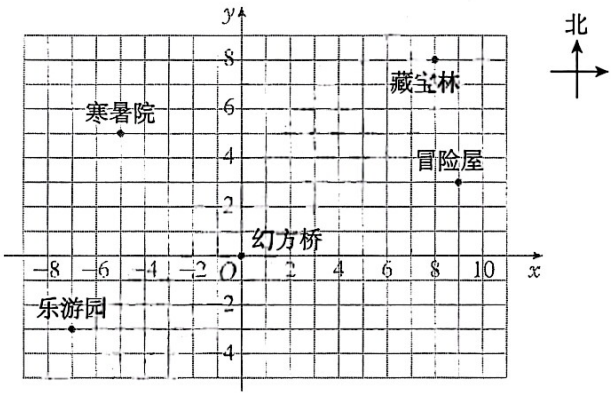


图 24-1-15

你还有其他建立平面直角坐标系的方法吗?

如图 24-1-16，将一块 30 cm×20 cm 的矩形钢板分割成六个大小相等的正方形. 试通过建立平面直角坐标系，确定各个正方形中心的坐标.

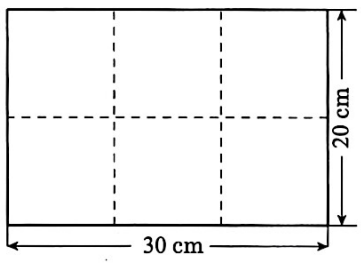


图 24-1-16

建立如图 24-1-17 所示的平面直角坐标系，规定 1 cm 为一个单位长度. 因为矩形的长和宽分别为 30 cm 和 20 cm，所以小正方形的边长为 10 cm. 各个正方形中心的坐标分别为(5,5)、(15,5)、(25,5)、(5,15)、(15,15)、(25,15).

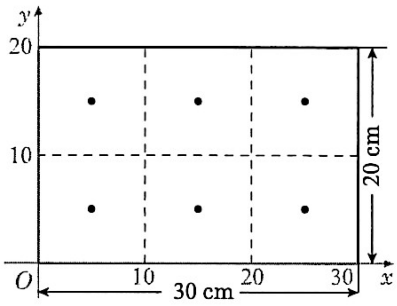
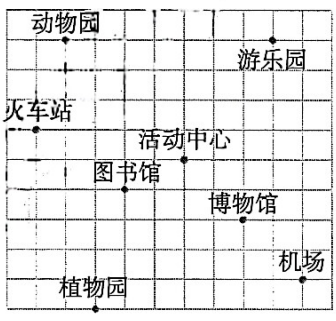


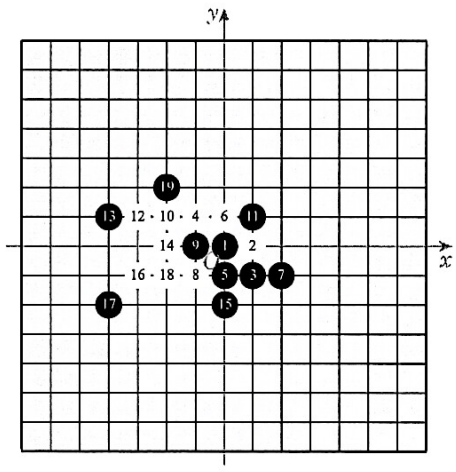
图 24-1-17

你还有其他建立平面直角坐标系的方法吗?

1. 建立一个平面直角坐标系，并用坐标表示图中各点的位置.



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 一局五子棋的棋谱如图所示.

(1) 如图，以棋盘上的黑 1 所在位置为原点，分别以黑 1 所在横线、纵线为 x 轴、y 轴，规定每个小方格的边长代表一个单位长度，建立平面直角坐标系，请用坐标表示黑 19、白 16、黑 7 的位置；

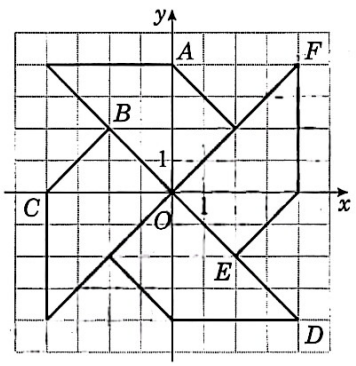
(2) 请再描述一种建立平面直角坐标系的方法，并用坐标表示黑 1、白 12、白 16 的位置.

习题 24.1

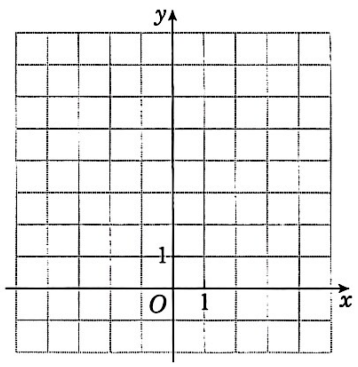
1. 一个纸风车模型如图所示，写出图中各点的坐标.

A_____、B_____、C_____、

D_____、E_____、F_____.



(第 1 题)



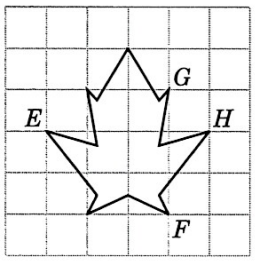
(第 2 题)

2. 在如图所示的平面直角坐标系中，描出下列各点：

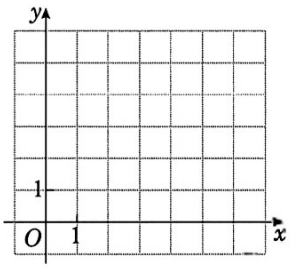
$A_1(-1,-1)$、$A_2(-1,1)$、$A_3(-4,1)$、$A_4(-1,3)$、$A_5(-3,3)$、$A_6(-1,5)$、$A_7(-1.5,5)$、$A_8(0,7)$、$A_9(1.5,5)$、$A_{10}(1,5)$、$A_{11}(3,3)$、$A_{12}(1,3)$、$A_{13}(4,1)$、$A_{14}(1,1)$、$A_{15}(1,-1)$.

顺次连接这些点(最后一点不再与其他点连接)，观赏所得的图形.

3. 请在图中建立一个平面直角坐标系，使点 E 的坐标为$(-2,1)$，点 F 的坐标为$(1,-1)$，并写出点 H、G 的坐标.



（第 3 题）

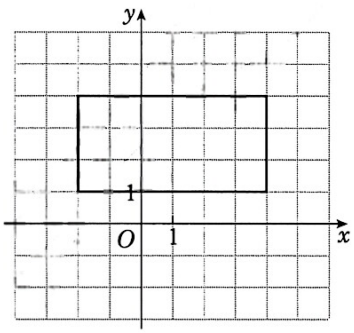


（第 4 题）

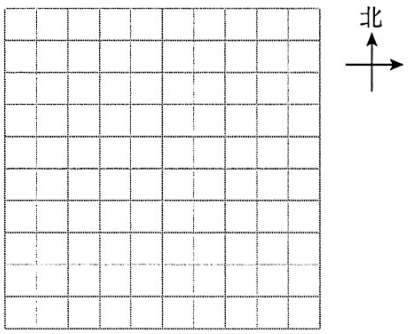
4. (1) 请你写出一个位于第一象限且横坐标与纵坐标相同的点的坐标，并在如图所示的平面直角坐标系中描出这个点；

(2) 把第(1)小题中的点记为 A，连接 OA(O 为原点)，说出线段 OA 与 x 轴正方向夹角的度数，并说明理由.

5. 在平面直角坐标系中，已知点 $A(2,\sqrt{6})$、$B(\sqrt{5},5)$、$C(-\sqrt{3},2.6)$、$D(-\sqrt{7},3)$、$E(0,\sqrt{17})$，这些点中，哪些在图中的阴影区域内？哪些不在图中的阴影区域内？



（第 5 题）



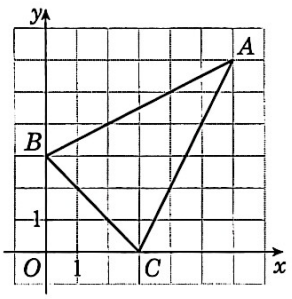
（第 6 题）

6. 已知小华家在市图书馆向东走 50 m、向北走 150 m 处，小海家在该图书馆向西走 200 m、向南走 50 m 处. 请在图中建立一个平面直角坐标系，在坐标系中标出小华家、小海家的位置并用坐标表示它们.

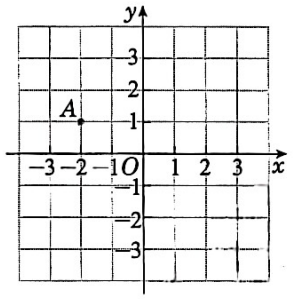
B

7. (1) 写出图中点 A、B、C 的坐标.

(2) $\triangle ABC$ 是否为等腰三角形？为什么？



(第 7 题)



(第 8 题)

8. 在平面直角坐标系中，横坐标与纵坐标都是整数的点称为格点；顶点都是格点的三角形称为格点三角形. 如图，已知格点 $A(-2,1)$，请画一个格点三角形，使点 A 在它的内部且其面积小于 2，并写出这个三角形各个顶点的坐标.

对于平面直角坐标系中的两点 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，如何计算这两点间的距离呢？

如图 24-2-1，过点 A 作平行于 y 轴的直线，过点 B 作平行于 x 轴的直线，两直线相交于点 C. 所以点 C 的坐标是 (x_1,y_2)，$AC=|y_1-y_2|$，$BC=|x_1-x_2|$.

因为 x 轴、y 轴互相垂直，所以 $\angle ACB=90°$.

在 Rt$\triangle ABC$ 中，因为 $AB^2=AC^2+BC^2$，所以 $AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$.

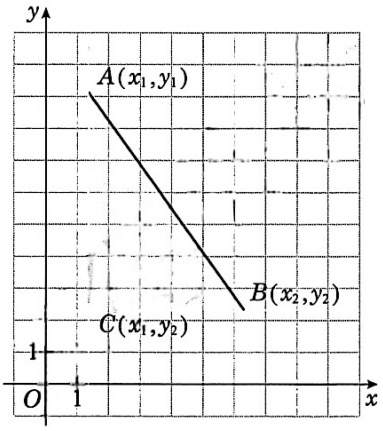


图 24-2-1

如果点 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$ 同在 x 轴或平行于 x 轴的直线上，$AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ 还适用吗？如果这两点同在 y 轴或平行于 y 轴的直线上呢？

两点间的距离公式 对于平面直角坐标系中的两点 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，其距离为

$$AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

在平面直角坐标系中，已知$\triangle ABC$ 三个顶点 A、B、C 的坐标分别为 $(-1,4)$、$(-4,-2)$、$(2,-5)$.

(1) $\triangle ABC$ 的三条边长分别为多少？

(2) 试判断$\triangle ABC$ 的形状.

(1) 因为点 A、B、C 的坐标分别为$(-1,4)$、$(-4,-2)$、$(2,-5)$，由两点间的距离公式，可得

$$AB=\sqrt{(-1+4)^2+(4+2)^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5},$$

$$BC=\sqrt{(-4-2)^2+(-2+5)^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5},$$

$$AC=\sqrt{(-1-2)^2+(4+5)^2}=\sqrt{90}=3\sqrt{10}.$$

(2) 因为 $AB=3\sqrt{5}$，$BC=3\sqrt{5}$，所以 $AB=BC$. 所以$\triangle ABC$ 是等腰三角形.

由 $AB^2+BC^2=45+45=90$，$AC^2=90$，可得 $AB^2+BC^2=AC^2$，所以$\triangle ABC$ 是直角三角形.

所以$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形.

如图 24-2-2，在平面直角坐标系中，已知两点 $A(3,3)$、$B(6,1)$.

(1) 求 A、B 两点间的距离；

(2) 若点 P 在 x 轴上，且满足 $PA=PB$，求点 P 的坐标.

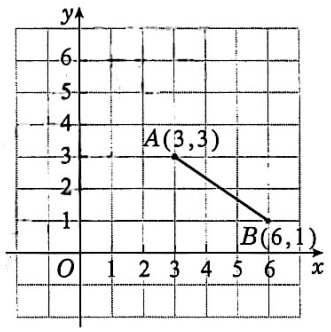


图 24-2-2

(1) 由两点间的距离公式，可得

$$AB=\sqrt{(3-6)^2+(3-1)^2}=\sqrt{13}.$$

(2) 因为点 P 在 x 轴上，可设其坐标为$(m,0)$. 由两点间的距离公式，可得

$$PA=\sqrt{(m-3)^2+(0-3)^2}=\sqrt{(m-3)^2+9},$$

$$PB=\sqrt{(m-6)^2+(0-1)^2}=\sqrt{(m-6)^2+1}.$$

因为 $PA=PB$，所以 $PA^2=PB^2$，即

$$(m-3)^2+9=(m-6)^2+1.$$

解得 $m=\dfrac{19}{6}$.

所以点 P 的坐标为 $\left(\dfrac{19}{6},0\right)$.

在平面直角坐标系中，已知两点 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$. 你能写出线段 AB 中点的坐标吗?

如图 24-2-3，海边有一个用于检测海面上船只位置的检测点. 以此检测点为原点，分别以正东、正北方向为 x 轴、y 轴正方向，以 1 km 为单位长度建立平面直角坐标系. 已知某一时刻甲、乙两艘船的坐标分别为(50,20)、(70,40)，求此时两船的距离并描述乙船相对于甲船的位置.

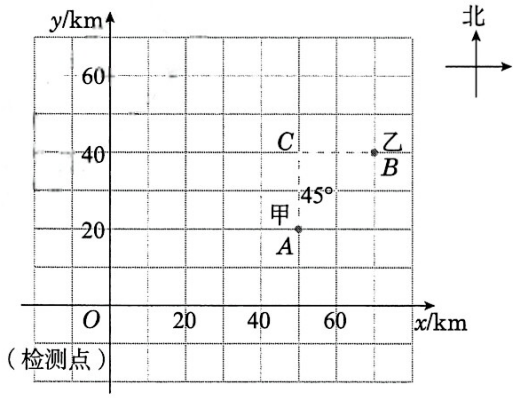


图 24-2-3

记甲、乙两艘船所在的点分别为 A、B.

由两点间的距离公式，可得甲、乙两艘船的距离为

$$AB=\sqrt{(70-50)^2+(40-20)^2}=20\sqrt{2}\ (\text{km}).$$

过点 A 作 y 轴的平行线，过点 B 作 x 轴的平行线，相交于点 C，则 $\angle ACB=90°$.

又因为 $AC=BC=20(\text{km})$，所以 $\triangle ACB$ 是一个等腰直角三角形，可得 $\angle BAC=45°$.

此时，乙船在甲船的北偏东 45°方向(东北方向)上，距离甲船 $20\sqrt{2}$ km.

像这种“北偏东 45°”的角称为方位角，其中“偏”字前的方向选南、北方向，“偏”字后的方向选东、西方向，且要求这两个方向的夹角为锐角.“方位角和距离”也可以表示物体的相对位置.

1. 求平面直角坐标系中两点间的距离：

(1) $A(1,2)$和 $B(4,6)$；

(2) $C(-3,5)$和 $D(7,-2)$；

(3) $E(-4,3)$和 $F(1,3)$；

(4) $G(-5,6)$和 $H(-3,-4)$.

2. 已知等边三角形 ABC 的顶点 B、C 的坐标分别为(0,0)和(4,0)，求顶点 A 的坐标.

3. 欢欢家在市体育馆向东走 1 000 m，再向北走 2 000 m 处；小华家在市体育馆向南走 500 m，再向西走 1 500 m 处. 以市体育馆所在位置为原点，分别以正东、正北方向为 x 轴、y 轴正方向，以 500 m 为单位长度建立平面直角坐标系.

(1) 根据要求画出平面直角坐标系，在坐标系中分别标出欢欢家和小华家所在的位置，并写出坐标；

(2) 计算欢欢家和小华家的距离；

(3) 描述小华家相对于欢欢家的位置.

习题 24.2

1. 求平面直角坐标系中两点间的距离：

(1) $A(0,12)$和$B(9,0)$；

(2) $C(-5,3)$和$D(-3,-4)$；

(3) $E(\sqrt{2},-5)$和$F(-3\sqrt{2},1)$；

(4) $M(3\sqrt{3},\sqrt{2})$和$N(-\sqrt{3},-2\sqrt{2})$.

2. 已知平面直角坐标系中三角形三个顶点的坐标，试判断这个三角形的形状：

(1) $A(-2,1)$、$B(2,3)$、$C(0,-1)$；

(2) $D(2,4)$、$E(-1,-3)$、$F(-3,2)$；

(3) $M(1,3)$、$N(-2,2)$、$P(0,-4)$.

3. 在平面直角坐标系中，已知点P的坐标为(m,m)，且点P到点$A(-2,3)$、$B(-1,-2)$的距离相等. 求m的值.

B

4. 在平面直角坐标系中，已知点$A(-3,2)$、$B(1,4)$，试分别求出满足下列条件的点C的坐标：

(1) 点C在x轴上，且$\triangle ABC$是等腰三角形；

(2) 点C在y轴上，且$\triangle ABC$是直角三角形.

1. 平移

如图 24-3-1，已知点 $A(-2,3)$，在平面直角坐标系中描出点 A 向右平移 5 个单位长度后的对应点 A_1，并写出它的坐标. 如果将点 A 向左平移 5 个单位长度呢？向上或向下平移 5 个单位长度呢？

观察平移前后点的坐标变化，你能从中发现什么规律吗？

在平面直角坐标系中再任取几个点，沿着与坐标轴平行的方向平移，平移前后点的坐标变化仍符合你所发现的规律吗？

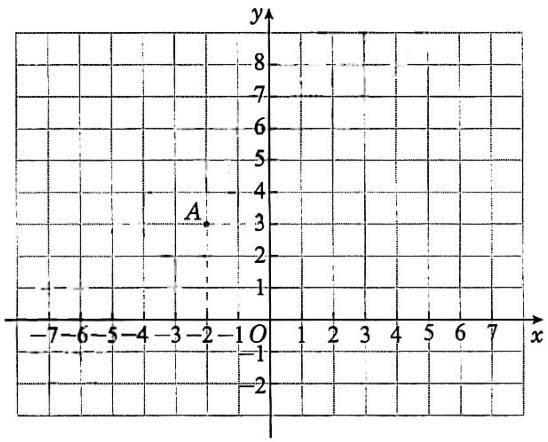


图 24-3-1

一般地，如果点 $M(x,y)$ 沿着与 x 轴或 y 轴平行的方向平移 $m(m>0)$ 个单位长度，那么

向右平移所对应的点的坐标为 $(x+m,y)$；

向左平移所对应的点的坐标为 $(x-m,y)$；

向上平移所对应的点的坐标为 $(x,y+m)$；

向下平移所对应的点的坐标为 $(x,y-m)$.

如图 24-3-2，$\triangle ABC$ 三个顶点的坐标分别是 $A(-3,-2)$、$B(-5,-5)$、$C(-2,-6)$.

(1) 将$\triangle ABC$ 向上平移 7 个单位长度，得到$\triangle A_1B_1C_1$，写出$\triangle A_1B_1C_1$ 各个顶点的坐标；

(2) 将$\triangle ABC$ 向右平移 6 个单位长度，得到$\triangle A_2B_2C_2$，写出$\triangle A_2B_2C_2$ 各个顶点的坐标.

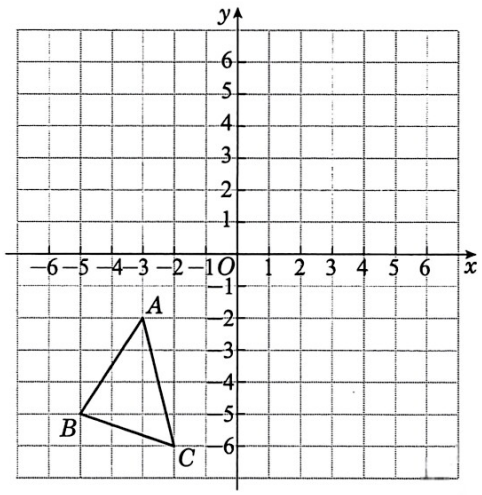


图 24-3-2

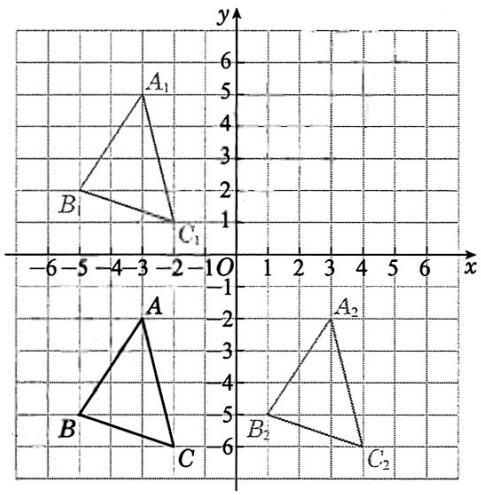


图 24-3-3

(1) 如图 24-3-3，将$\triangle ABC$ 向上平移 7 个单位长度，此时$\triangle ABC$ 三个顶点 A、B、C 都向上平移 7 个单位长度.

由 $A(-3,-2)$、$B(-5,-5)$、$C(-2,-6)$，得$\triangle A_1B_1C_1$ 各个顶点的坐标分别为 $A_1(-3,5)$、$B_1(-5,2)$、$C_1(-2,1)$.

(2) 如图 24-3-3，同样可得 $\triangle A_2B_2C_2$ 各个顶点的坐标分别为 $A_2(3,-2)$、$B_2(1,-5)$、$C_2(4,-6)$.

在给定的平面直角坐标系中，

如果把一个图形向右(或向左)平移 $m(m>0)$个单位长度，那么这个图形各个点的横坐标都加(或减)m；

如果把一个图形向上(或向下)平移 $m(m>0)$个单位长度，那么这个图形各个点的纵坐标都加(或减)m.

如图 24-3-4，正方形 $ABCD$ 四个顶点的坐标分别为 $A(1,5)$、$B(1,2)$、$C(4,2)$、$D(4,5)$. 将正方形 $ABCD$ 向左平移 7 个单位长度，得到正方形 $A_1B_1C_1D_1$；再将正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 向下平移 8 个单位长度，得到正方形 $A_2B_2C_2D_2$. 如果将正方形 $ABCD$ 作一次平移，可以得到正方形 $A_2B_2C_2D_2$ 吗?

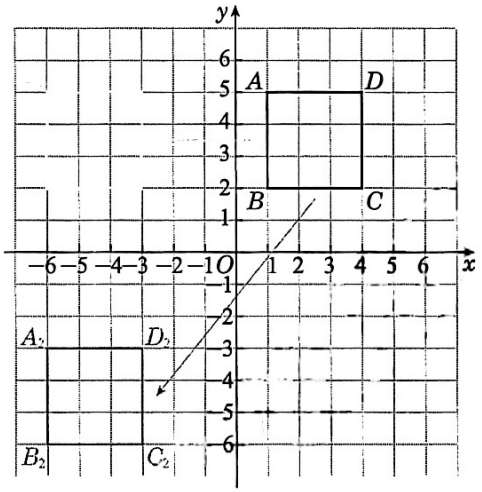


图 24-3-4

两次平移后，四个顶点 A_2、B_2、C_2、D_2 的坐标分别是 $A_2(-6,-3)$、$B_2(-6,-6)$、$C_2(-3,-6)$、$D_2(-3,-3)$. 如果将正方形 $ABCD$ 作一次平移，使点 A 移到点 A_2 的位置，就得到了正方形 $A_2B_2C_2D_2$(图 24-3-4).

一般地，将一个图形依次沿两个坐标轴方向平移后所得到的图形和原来的图形形状、大小完全相同，且可以通过将原来的图形作一次平移得到.

1. 填空题：

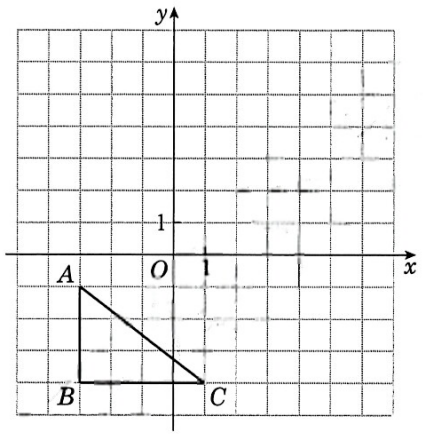
(1) 点 $P(4,-2)$ 向左平移 7 个单位长度后所对应的点的坐标是_____;

(2) 点 $Q(-3,-1)$ 向上平移 5 个单位长度后所对应的点的坐标是_____;

(3) 点 $M(-6,-4)$ 向_____平移_____个单位长度后所对应的点的坐标是(3,−4);

(4) 点 $N(-1,5)$ 向_____平移_____个单位长度后所对应的点的坐标是(−1,0).

2. 如图，将△ABC 先向上平移 8 个单位长度，再向右平移 6 个单位长度，得到△$A'B'C'$，画出平移后的图形，并写出其各个顶点的坐标.



(第 2 题)

2. 轴对称

如图 24-3-5，已知点 $A(-4,3)$，在平面直角坐标系中分别描出点 A 关于 x 轴对称的点 B、关于 y 轴对称的点 C，并写出点 B、C 的坐标.

观察点 A 与点 B，点 A 与点 C 坐标之间的关系，你能从中发现什么规律吗?

在平面直角坐标系中再任取几个点，写出它们关于坐标轴对称的点的坐标，这些坐标之间的关系仍符合你所发现的规律吗?

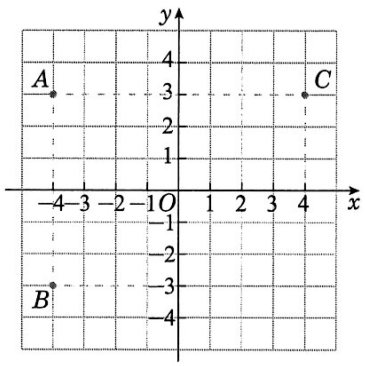


图 24-3-5

一般地，在平面直角坐标系中，

点 $M(x,y)$关于 x 轴对称的点的坐标为$(x,-y)$；

点 $M(x,y)$关于 y 轴对称的点的坐标为$(-x,y)$.

反过来，坐标具有上述关系的两个点关于坐标轴对称吗?

如图 24-3-6，$\triangle ABC$ 三个顶点的坐标分别是 $A(-3,-2)$、$B(-5,-5)$、$C(-2,-6)$，画出$\triangle ABC$ 关于 x 轴对称的$\triangle A_1B_1C_1$，并写出其各个顶点的坐标.

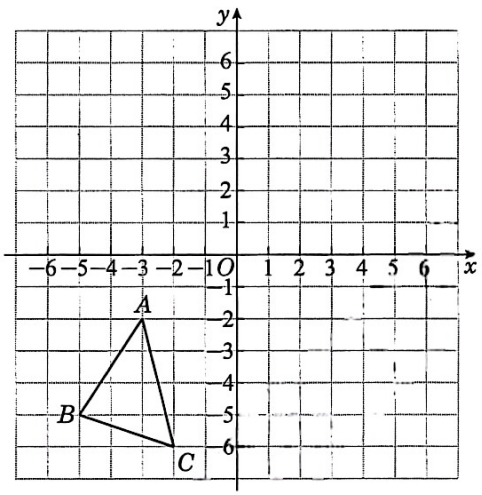


图 24-3-6

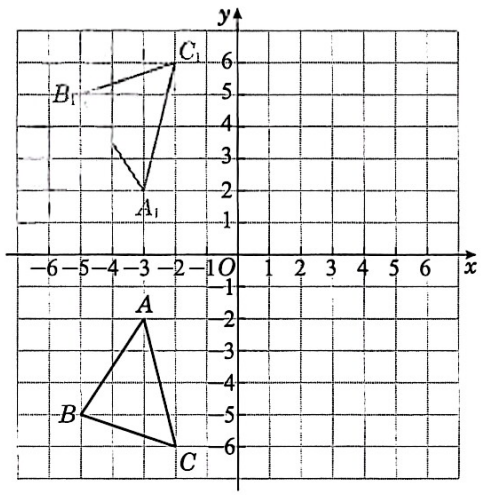


图 24-3-7

$\triangle A_1B_1C_1$ 与$\triangle ABC$ 关于 x 轴对称，从而$\triangle A_1B_1C_1$ 顶点 A_1、B_1、C_1 与$\triangle ABC$ 顶点 A、B、C 分别关于 x 轴对称.

如图 24-3-7，分别描出点 A、B、C 关于 x 轴对称的点 A_1、B_1、C_1，顺次连接即得$\triangle A_1B_1C_1$.

由 $A(-3,-2)$、$B(-5,-5)$、$C(-2,-6)$，得 $A_1(-3,2)$、$B_1(-5,5)$、$C_1(-2,6)$.

在给定的平面直角坐标系中，

如果两个图形关于 x 轴对称，那么这两个图形上各组对应点的横坐标相同，纵坐标互为相反数；如果点 (x,y) 在一个关于 x 轴对称的图形上，那么以 $(x,-y)$ 为坐标的点也在这个图形上.

如果两个图形关于 y 轴对称，那么这两个图形上各组对应点的纵坐标相同，横坐标互为相反数；如果点 (x,y) 在一个关于 y 轴对称的图形上，那么以 $(-x,y)$ 为坐标的点也在这个图形上.

如图 24-3-8，菱形 $ABCD$ 四个顶点的坐标分别是 $A(3,6)$、$B(0,4)$、$C(3,2)$、$D(6,4)$. 在平面直角坐标系中先画出菱形 $ABCD$ 关于 y 轴对称的菱形 $A_1B_1C_1D_1$，再画出菱形 $A_1B_1C_1D_1$ 关于 x 轴对称的菱形 $A_2B_2C_2D_2$. 问：菱形 $ABCD$ 和菱形 $A_2B_2C_2D_2$ 的顶点关于原点对称吗？它们的坐标之间有什么关系？

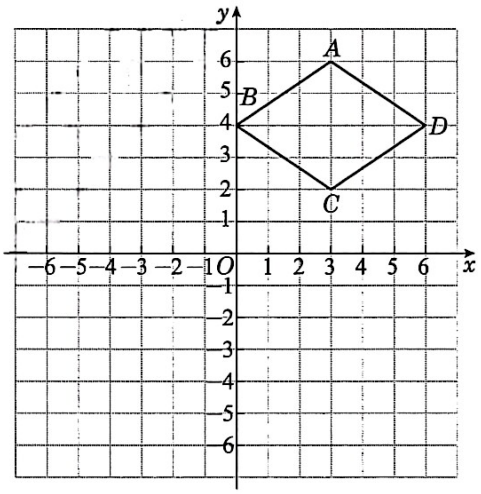


图 24-3-8

一般地，在平面直角坐标系中，点 $M(x,y)$ 关于原点对称的点的坐标为 $(-x,-y)$.

1. 填空题：

(1) 与点 $P(-4,-\sqrt{2})$ 关于 x 轴对称的点的坐标是_____；

(2) 与点 $Q(\sqrt{3},-1)$ 关于 y 轴对称的点的坐标是_____；

(3) 与点 $M(0,-\sqrt{2})$ 关于 x 轴对称的点的坐标是_____；

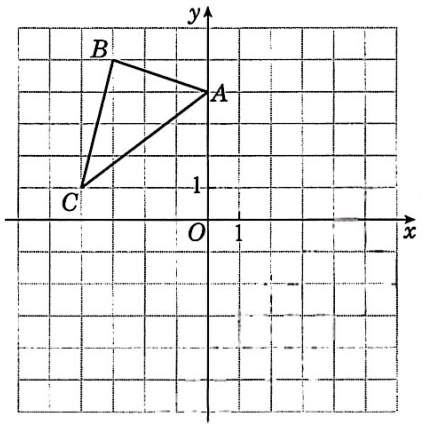
(4) 与点 $N(x,0)$ 关于 y 轴对称的点的坐标是_____.

2. 在图中，画出 $\triangle ABC$ 分别关于 x 轴、y 轴对称的 $\triangle A_1B_1C_1$ 和 $\triangle A_2B_2C_2$，再写出各个三角形的顶点坐标.

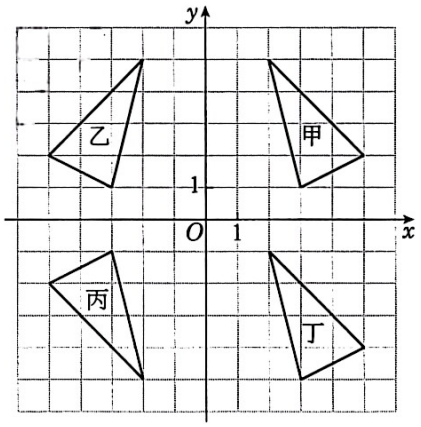
A _____、A_1 _____、A_2 _____；

B _____、B_1 _____、B_2 _____；

C _____、C_1 _____、C_2 _____.



(第 2 题)



(第 3 题)

3. 如图，在平面直角坐标系中，有标记为甲、乙、丙、丁的四个三角形.

(1) 哪两个三角形关于 x 轴对称？

(2) 哪两个三角形关于 y 轴对称？

(3) 哪个三角形经过平移可以得到另一个三角形？请说明怎样平移.

习题 24.3

1. 填空题：

(1) 点 $A(-2,3)$ 向右平移 4 个单位长度后所对应的点的坐标是_____，落在第_____象限；

(2) 点 $B(\sqrt{2},\sqrt{3})$ 向下平移 $\sqrt{3}$ 个单位长度后所对应的点的坐标是_____，落在_____；

(3) 点 $C(-3,4)$ 向_____平移_____个单位长度后落在 y 轴上；

(4) 点 $D(-\sqrt{3},-4)$ 向_____平移_____个单位长度后落在 x 轴上；

(5) 点 $E(-5,0)$ 向_____平移 $m(m>0)$ 个单位长度后落在第三象限；

(6) 点 $F(0,\sqrt{3})$ 向_____平移 $m(m>0)$ 个单位长度后落在第二象限.

2. 填空题：

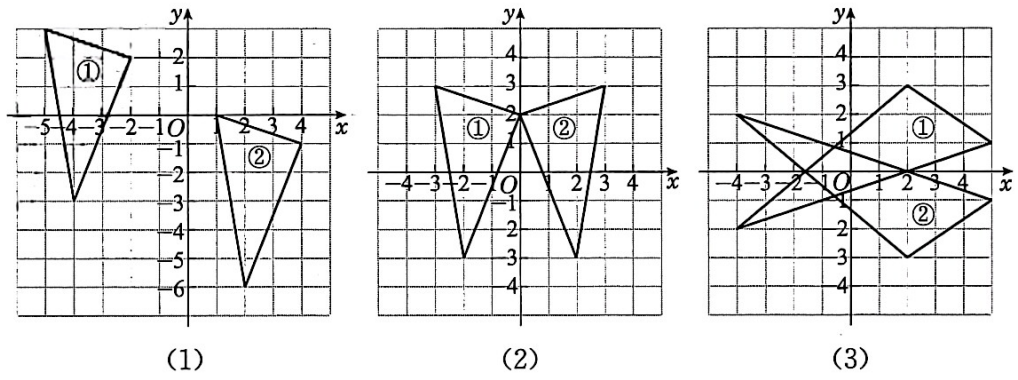
(1) 与点 $A(-2,3)$ 关于 x 轴对称的点在第_____象限，坐标是_____；

(2) 与点 $B(\sqrt{2},\sqrt{3})$ 关于 y 轴对称的点在第_____象限，坐标是_____；

(3) 点 $P(-3,4)$ 与点 $Q(3,4)$ 关于_____对称；

(4) 点 $M(-\sqrt{3},-4)$ 与点 $N(-\sqrt{3},4)$ 关于_____ 对称.

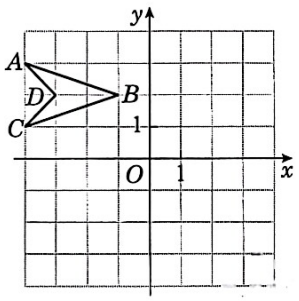
3. 下列各图中从图形①到图形②的变化，是平移还是轴对称？如果是平移，请说明怎样平移；如果是轴对称，请指出对称轴.



(1)　(2)　(3)

(第 3 题)

4. 在平面直角坐标系中，将$A(-4,3)$、$B(-1,2)$、$C(-4,1)$、$D(-3,2)$四个点用线段顺次连接成一个图案，如图所示.



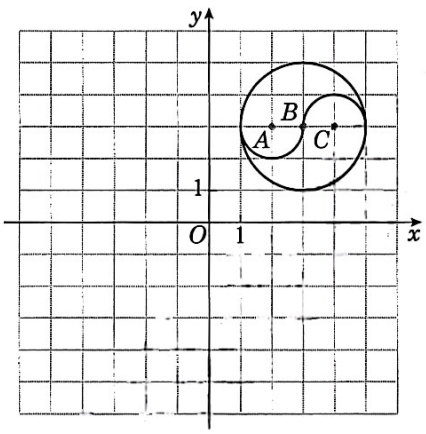
（第4题）

（1）如果原来四个点的纵坐标保持不变，横坐标都加上4，将对应所得的点相应地用线段顺次连接起来，那么所得的图案与原来的图案有怎样的位置关系？

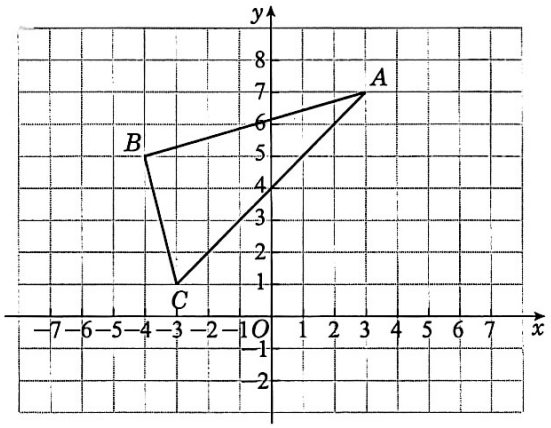
（2）如果原来四个点的横坐标保持不变，纵坐标都减去3，将对应所得的点相应地用线段顺次连接起来，那么所得的图案与原来的图案有怎样的位置关系？

B

5. 如图，在平面直角坐标系中，圆心A、B、C的坐标分别是$(2,3)$、$(3,3)$、$(4,3)$，画出这个图案关于x轴对称的图案.



（第5题）



（第6题）

6. 如图，在平面直角坐标系中，$\triangle ABC$三个顶点的坐标分别为$A(3,7)$、$B(-4,5)$、$C(-3,1)$. 画出$\triangle ABC$关于直线$x=1$对称的三角形，并写出其各个顶点的坐标.

1. 基本概念：平面直角坐标系.

2. 平面直角坐标系：

两条互相垂直且有公共原点的数轴组成平面直角坐标系.

给定平面直角坐标系，平面上的点与有序数对是一一对应的.

3. 直线的坐标表示：

纵坐标等于 b 的点的全体是经过点 $A(0,b)$ 且平行于 x 轴的直线，记为直线 $y=b$. 特别地，x 轴可以记为直线 $y=0$.

横坐标等于 a 的点的全体是经过点 $A(a,0)$ 且平行于 y 轴的直线，记为直线 $x=a$. 特别地，y 轴可以记为直线 $x=0$.

4. 两点间的距离公式：

对于平面直角坐标系中的两点 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，其距离为

$$AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

5. 平移与轴对称：

(1) 平移：如果点 $M(x,y)$ 沿着与 x 轴或 y 轴平行的方向平移 $m(m>0)$ 个单位长度，那么

向右平移所对应的点的坐标为 $(x+m,y)$；

向左平移所对应的点的坐标为 $(x-m,y)$；

向上平移所对应的点的坐标为 $(x,y+m)$；

向下平移所对应的点的坐标为 $(x,y-m)$.

(2) 轴对称：在平面直角坐标系中，点 $M(x,y)$ 关于 x 轴对称的点的坐标为 $(x,-y)$；点 $M(x,y)$ 关于 y 轴对称的点的坐标为 $(-x,y)$.

1. 在平面直角坐标系中，如果 a、b 都是正数，判断下列各点分别在什么位置：

(1) 点(a,b)在第_____象限；

(2) 点$(-a,b)$在第_____象限；

(3) 点$(a,-b)$在第_____象限；

(4) 点$(-a,-b)$在第_____象限；

(5) 点$(a,0)$在_____；

(6) 点$(0,-b)$在_____.

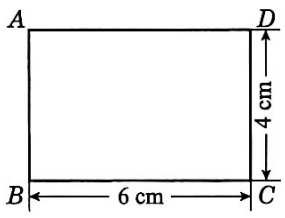
2. 在平面直角坐标系中，写出下列各点的坐标：

(1) 点 A 在 x 轴的负半轴上，与原点的距离为 5 个单位长度；

(2) 点 B 在 y 轴的正半轴上，与原点的距离为 3 个单位长度；

(3) 点 C 在第二象限，它到 x 轴、y 轴的距离分别为 3 个单位长度和 4 个单位长度.

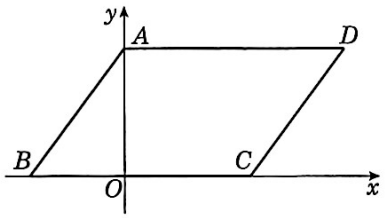
3. 如图，矩形 $ABCD$ 的两条邻边长分别为 6 cm、4 cm. 现规定 1 cm 为 1 个单位长度. 请画出一个平面直角坐标系，使 x 轴与 BC 平行，且点 B 的坐标是 $(-3,-2)$，并写出其他三个点的坐标.



(第 3 题)

4. 已知平面直角坐标系中两点 $A(-5,2)$、$B(-1,7)$，在坐标轴上求点 P，使 $PA=PB$.

5. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，边 BC 在 x 轴上，点 A 在 y 轴上，已知点 A 的纵坐标是 4，点 D 的横坐标是 7. 求这个平行四边形的面积.



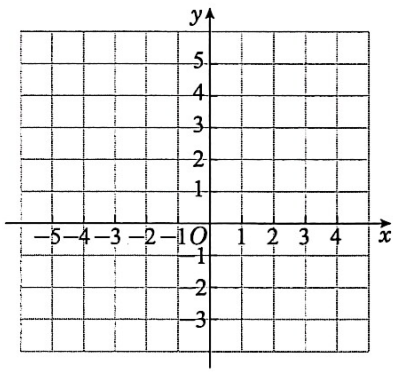
(第 5 题)

6. 如图，每个小方格的边长都为 1 个单位长度，在平面直角坐标系中，已知点 $A(-4,5)$、$B(-5,-1)$、$C(-2,-2)$.

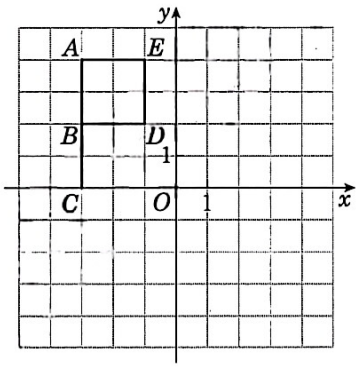
(1) 在图中描出 A、B、C 三个点，并画出$\triangle ABC$；

(2) 把$\triangle ABC$ 向右平移 5 个单位长度，再向下平移 1 个单位长度，得到$\triangle A'B'C'$，在图中画出$\triangle A'B'C'$，并写出点 A'、B'、C'的坐标；

(3) 在(2)的条件下，如果$\triangle ABC$ 内的一个点 P 平移后得到点 P'，且点 P'的坐标为(a,b)，写出点 P 的坐标(用 a、b 表示).



(第 6 题)



(第 7 题)

7. 在平面直角坐标系中，由 $A(-3,4)$、$B(-3,2)$、$C(-3,0)$、$D(-1,2)$、$E(-1,4)$五个点用线段连接成一面如图所示的小旗图案.

(1) 如果原来五个点的纵坐标保持不变，横坐标都乘 -1，再将对应所得的点相应地用线段连接起来，所得的图案与原来的图案有什么位置关系？

(2) 如果原来五个点的横坐标保持不变，纵坐标都乘 -1，再将对应所得的点相应地用线段连接起来，所得的图案与原来的图案有什么位置关系？

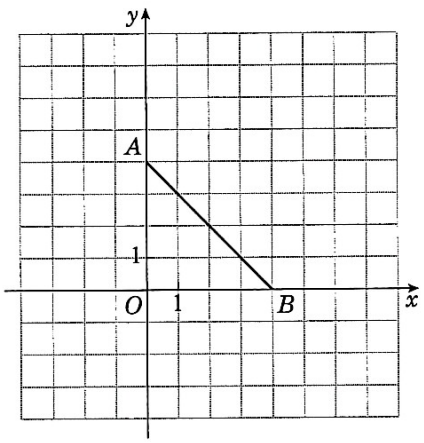
(3) 如果原来五个点的横、纵坐标都乘 -1，再将对应所得的点相应地用线段连接起来，所得的图案与原来的图案有什么位置关系？

B

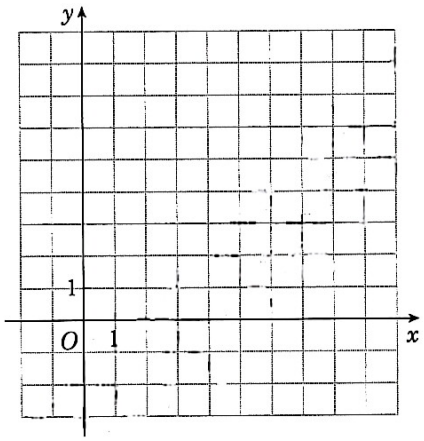
8. 如图，点 A 的坐标是$(0,4)$，点 B 的坐标是$(4,0)$.

(1) 以 AB 为腰，在平面直角坐标系中画一个等腰直角三角形，符合这样条件的三角形有几个？写出符合条件的三角形的第三个顶点的坐标.

(2) 以 AB 为底，在平面直角坐标系中画一个等腰直角三角形，符合这样条件的三角形有几个？写出符合条件的三角形的第三个顶点的坐标.



(第 8 题)



(第 9 题)

9. 已知点 $A(0,0)$、$B(2,3)$、$C(2,4)$、$D(5,5)$、$E(1,4)$、$F(0,6)$.

(1) 在如图所示的平面直角坐标系中画出线段 AB、CD、EF.

(2) 线段 AB、CD、EF 中，一条保持不动，另两条沿平行于 x 轴(或 y 轴)的方向平移，使它们首尾相接组成一个三角形. 在如图所示的平面直角坐标系中画出所有符合条件的三角形，并写出三角形三个顶点的坐标.



第25章

一次函数

在现实生活中，有些数量之间存在依赖关系. 例如，路程依赖于行进速度，也依赖于时间. 这样的依赖关系是确定的，称之为函数. 对函数的研究是数学中的一个重要课题.

在本章中，我们将初步介绍变量与函数的概念，重点学习正比例函数与一次函数的表达式、图像和基本性质. 作为应用，将通过一次函数来重新认识一元一次方程与一元一次不等式.

在具体的问题中，我们要特别注意区分变量和常量，识别一个变量对另一个变量的依赖性及有关变量的变化范围，并学会用图像来理解和表达函数关系.

考察下面的例子：

(1) 一辆汽车以 80 km/h 的速度匀速行驶，它行驶的路程 s(单位：km)与行驶的时间 t(单位：h)之间的关系是 $s=80t$；

(2) 一个圆的面积 S(单位：cm^2)与它的半径 r(单位：cm)之间的关系是 $S=\pi r^2$.

可以发现：在(1)中，利用公式 $s=80t$ 计算汽车在不同的时间内所行驶的路程时，t、s 可以取不同的数值，而速度的数值保持不变；在(2)中，利用公式 $S=\pi r^2$ 计算不同半径的圆的面积时，r、S 可以取不同的数值，而 π 的数值保持不变.

在考察某个问题的过程中，保持数值不变的量称为常量. 如上例中的 80 km/h、π 均为常量；可以取不同数值的量称为变量，如上例中的时间 t、路程 s、半径 r、面积 S.

在很多问题中，一个变量往往依赖于另外一个变量. 在上例中，行驶的路程会随着行驶的时间的变化而变化，当行驶的时间确定时，行驶的路程也随之唯一确定，即变量 s 依赖于变量 t，两者的依赖关系为 $s=80t$. 圆的面积会随着半径的变化而变化，当半径确定时，圆的面积也随之唯一确定，即变量 S 依赖于变量 r，两者的依赖关系为 $S=\pi r^2$.

一般地，若在某个变化过程中有两个变量，设为 x 和 y. 当 x 在取值范围内变化时，y 随着 x 的变化而变化；当 x 的值确定时，y 的值也随之唯一确定. 变量 y 关于变量 x 的这种依赖关系叫作函数，或者说变量 y 是变量 x 的函数，x 称为自变量.

在上例(1)中，我们用 $y=80x$ 表示 y 随着 x 的变化而变化的规律. 像这种左边是 y 而右边是关于 x 的代数式的等式常用于表示函数，通常称为函数的表达式.

如果当 $x=a$ 时 $y=b$，那么称 b 为函数在 $x=a$ 时相应的函数值.

设某地的气温为 x 摄氏度(℃)，y 华氏度(℉)，其中 x 与 y 可以按如图 25-1-1 的方式转化. 问：y 是不是 x 的函数？为什么？

表 25-3

时刻 t/时	0	3	8	14	21	24
气温 T/℃	−1	−3	0	5	0	−3

课堂练习 25.1

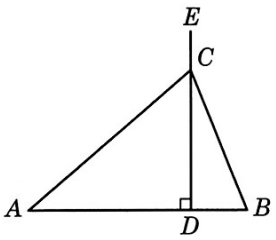
1. 下列表述中，哪些量是自变量？哪些量是自变量的函数？试写出函数的表达式.

(1) 圆的周长 C(单位：cm)随着半径 r(单位：cm)的变化而变化；

(2) 等腰三角形中，顶角的度数 y 随着底角的度数 x 的变化而变化；

(3) 一支笔的单价为 2 元，购买 n 支笔的总价 S(单位：元)随着购买笔的数量 n(单位：支)的变化而变化.

2. 如图，线段 $AB=a$，D 为 AB 上一定点，在垂直于 AB 的射线 DE 上有一个动点 C(点 C 与点 D 不重合)，分别连接 CA、CB，得到 $\triangle ABC$.



(第 2 题)

(1) 指出在点 C 运动使 $\triangle ABC$ 的面积发生变化的过程中，线段 AB、CD 的长哪一个是常量？哪一个是变量？

(2) 设 CD 的长为 h，$\triangle ABC$ 的面积为 S，试写出 S 关于 h 的函数表达式.

习题 25.1

1. 下列表述中，哪些量是自变量？哪些量是自变量的函数？试写出函数的表达式.

(1) 每分钟向一个水池注水 0.1 m^3，注水量 y(单位：m^3)随着注水时间

x(单位：min)的变化而变化；

(2) 周长为 15 cm 的等腰三角形，腰长 a(单位：cm)随着底边长 b(单位：cm)的变化而变化；

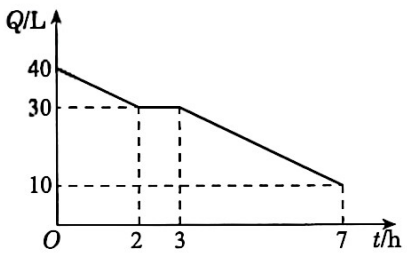
(3) 把 25 kg 的米分两袋装，乙袋装的质量 y(单位：kg)随着甲袋装的质量 x(单位：kg)的变化而变化.

2. 求下列函数当 $x=3$ 时的函数值：

(1) $y=\frac{1}{2}x^2$；　　(2) $y=\frac{1}{3x-1}$.

B

3. 一辆机动车行驶在路途中，出发时，油箱内存油 40 L. 行驶若干小时后司机在服务区停车吃饭，饭后继续行驶一段时间后到某加油站准备加油. 图中表示的是该过程中油箱里剩余油量 Q(单位：L)与行驶时间 t(单位：h)之间的函数关系.



(第 3 题)

(1) 行驶几小时后司机在服务区停车吃饭？吃饭用了多长时间？

(2) 饭后行驶几小时到加油站？到加油站时油箱内还剩多少油？

1. 正比例函数的概念

设某种水果的单价为 25 元/千克，售出的数量为 x 千克，销售金额为 y 元，于是 $y=25x$ 或 $\frac{y}{x}=25$.

一个正方形的周长随着边长的变化而变化. 设正方形的边长为 $x(x>0)$，则其周长为 $y=4x$，也可表示为 $\frac{y}{x}=4$.

如果变量 y 与变量 x 的比值是一个不等于 0 的常数，那么就说变量 y 与变量 x 成正比例. 用数学式子表示为 $\frac{y}{x}=k$ 或 $y=kx$，其中 k 是一个不等于 0 的常数.

下列表述中的变量 y 与变量 x 是否成正比例？

(1) 铁的密度为 7.9 g/cm^3，铁块的质量 y(单位：g)与它的体积 x(单位：cm^3)；

(2) 圆的面积随着半径的变化而变化，圆的面积 y(单位：m^2)与该圆的半径 x(单位：m).

变量 y 与变量 x 成正比例，说明 y 是 x 的一个函数.

形如 $y=kx$(k 是常数，$k\neq0$)的函数叫作正比例函数，其中非零常数 k 称为比例系数，自变量 x 的取值范围是一切实数.

确定了比例系数 k，就可以给出正比例函数的表达式：$y=kx(k\neq0)$.

已知正比例函数 $y=-4x$，指出此函数的比例系数，并求当自变量 x 分别取 -5、0、3 时的函数值.

函数 $y=-4x$ 的比例系数是 -4.

当 $x=-5$ 时，$y=(-4)\times(-5)=20$；

当 $x=0$ 时，$y=(-4)\times 0=0$；

当 $x=3$ 时，$y=(-4)\times 3=-12$.

已知 y 是 x 的正比例函数，当 $x=3$ 时函数值为 24.

(1) 求该函数的表达式；

(2) 当函数值分别为 -5、0、3 时，求自变量 x 的值.

(1) 因为 y 是 x 的正比例函数，可设其表达式为 $y=kx(k\neq 0)$.

这里求正比例函数表达式的方法是待定系数法. 表达式中 k 是待定系数，利用已知条件列出关于 k 的方程再求解，可确定 k 的值.

根据题意，$3k=24$，解得 $k=8$.

所以该函数的表达式为 $y=8x$.

(2) 由 $y=8x$，知

当 $y=-5$ 时，$-5=8x$，解得 $x=-\frac{5}{8}$；

当 $y=0$ 时，$0=8x$，解得 $x=0$；

当 $y=3$ 时，$3=8x$，解得 $x=\frac{3}{8}$.

1. 下列表述中的变量 y 与变量 x 是否成正比例？为什么？

(1) 菱形的一条对角线长为 4，它的面积 y 与另一条对角线的长 x；

(2) 等腰三角形的周长一定，它的底边长 y 与它的腰长 x.

2. 下列函数中，哪些是正比例函数？

(1) $y=\frac{x}{5}$；　　(2) $y=-\frac{1}{5}x$；

(3) $y=\frac{5}{x}$；　　(4) $y=5x+2$.

3. 已知 y 是 x 的正比例函数，且当 $x=2$ 时，$y=12$. 求该函数的比例系数，并写出该函数的表达式.

2. 正比例函数的图像

已知正比例函数 $y=2x$.

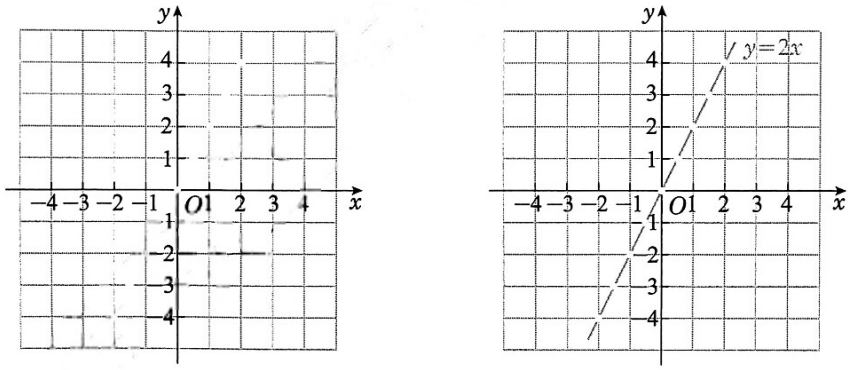
(1) 列表：取自变量 x 的一些值，计算出相应的函数值 y，见表 25-4.

表 25-4

x	…	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	…
$y=2x$	…	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	…

(2) 描点：分别以所取 x 的值和相应的函数值 y 作为点的横坐标和纵坐标，描出这些坐标所对应的各点，如图 25-2-1(1)所示，不难发现上述所有点均落在同一条过原点的直线上.

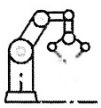
(3) 连线：按照横坐标由小到大的顺序，把所描出的各点用直线连接起来，如图 25-2-1(2)所示.



(1)　　(2)

图 25-2-1

注意到所画直线上任意一点的坐标都满足函数的表达式 $y=2x$；同时，对于任意一对满足这个函数表达式的 x、y，以(x,y)为坐标的点都在所画的直线上. 因此，函数 $y=2x$ 的图像就是这条直线.



画出函数 $y=-2x$ 的图像.

函数 $y=-2x$ 的图像也是一条直线，如图 25-2-2 所示.

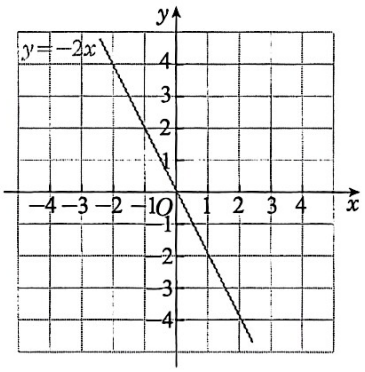


图 25-2-2

函数 $y=-2x$ 与 $y=2x$ 的图像有哪些共同的特点?

观察可见，函数$y=2x$与 $y=-2x$ 的图像都经过原点. 实际上，原点 O 的坐标(0,0)满足这两个函数的表达式.

我们知道，两点确定一条直线. 例如，函数 $y=2x$ 的图像，可以由原点 $O(0,0)$和点(1,2)确定；函数 $y=-2x$ 的图像可以由原点 $O(0,0)$和点(1,−2)确定.

正比例函数 $y=kx(k\neq0)$的图像是一条经过原点的直线，这条直线称为直线 $y=kx$.

在同一平面直角坐标系中，分别画出下列函数的图像：

$$y=3x,\ y=x,\ y=\frac{1}{3}x.$$

画正比例函数的图像，可先找图像上的两个点，再经过这两点画一条直线. 为了方便，其中一点通常取原点.

选取点 $O(0,0)$和点 $A(1,3)$，经过这两点画一条直线，就得到函数 $y=3x$ 的图像.

选取点 $O(0,0)$和点 $B(2,2)$，经过这两点画一条直线，就得到函数 $y=x$ 的图像.

选取点 $O(0,0)$ 和点 $C(3,1)$，经过这两点画一条直线，就得到函数 $y=\frac{1}{3}x$ 的图像.

这三个函数的图像如图 25-2-3 所示.

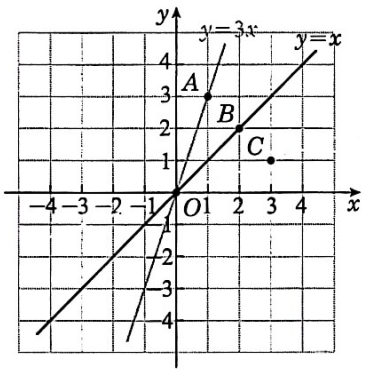


图 25-2-3

1. 若函数 $y=kx(k\neq0)$ 的图像经过点 $A\left(-\frac{1}{2},5\right)$，请写出该函数的表达式.

2. 在同一平面直角坐标系中，分别画出下列两个函数的图像：

(1) $y=4x$ 与 $y=-\frac{1}{4}x$；　　(2) $y=\frac{1}{3}x$ 与 $y=-3x$.

3. 正比例函数的性质



在同一平面直角坐标系中，分别画出下列函数的图像：

$$y=-4x,\ y=-x,\ y=-\frac{1}{4}x.$$

所画图像如图 25-2-4 所示.

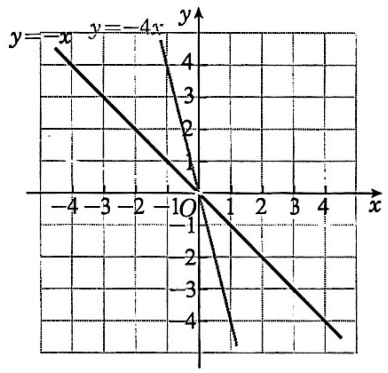


图 25-2-4

观察图 25-2-3 和图 25-2-4，回答下列问题：

(1) 图 25-2-3 中的函数图像经过哪两个象限？图 25-2-4 中的函数图像呢？

(2) 正比例函数 $y=kx(k\neq0)$ 的图像所经过的两个象限与常数 k 有什么关系？

(3) 图 25-2-3 中，当一条直线上的点的横坐标从小到大逐渐变化时，点的位置随之从_____到_____逐渐变化(填“高”或“低”)；这就是说，当自变量 x 的值从小到大逐渐变化时，函数值 y 相应地从_____到_____逐渐变化(填“大”或“小”).

(4) 图 25-2-4 中，当一条直线上的点的横坐标从小到大逐渐变化时，点的位置随之从_____到_____逐渐变化(填“高”或“低”)；这就是说，当自变量 x 的值从小到大逐渐变化时，函数值 y 相应地从_____到_____逐渐变化(填“大”或“小”).

通过观察，可以归纳正比例函数 $y=kx(k\neq0)$ 有如下性质：

(1) 当 $k>0$ 时，正比例函数的图像经过第一、三象限，函数值 y 随着自变量 x 的增大而增大；

(2) 当 $k<0$ 时，正比例函数的图像经过第二、四象限，函数值 y 随着自变量 x 的增大而减小.

(1)(2)这两个性质的逆命题也是成立的.

已知正比例函数 $y=(1-2a)x$，y 随着 x 的增大而减小，那么 a 的取值范围是什么?

对于正比例函数 $y=(1-2a)x$，由 y 随着 x 的增大而减小，可知

$$1-2a<0.$$

解得 $a>\frac{1}{2}$.

所以，a 的取值范围是 $a>\frac{1}{2}$.

在水管放水的过程中，放水的时间 x(单位：min)与流出的水量 y(单位：m^3)是两个变量. 已知每分钟流出的水量是 0.2 m^3，放水的过程持续 10 min. 写出 y 关于 x 的函数表达式，并指出自变量 x 的取值范围，再画出这个函数的图像.

在水管放水的过程中，变量 y 与变量 x 成正比例，比例系数是 0.2. 相应函数的表达式是 $y=0.2x$，自变量 x 的取值范围是 $0\leqslant x\leqslant10$. 这个函数的图像是一条线段，如图 25-2-5 所示.

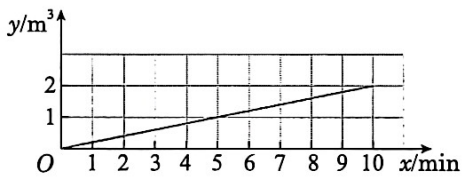


图 25-2-5

1. 如果正比例函数 $y=kx$ 的图像经过第一、三象限，那么 y 随着 x 的增大而_____；如果正比例函数 $y=kx$ 的图像经过第二、四象限，那么 y 随着 x 的增大而_____.

2. 已知 $mn<0$，那么函数 $y=\frac{m}{n}x$ 的图像经过第_____象限.

3. (1) 在同一平面直角坐标系中，画出正比例函数 $y=5x$ 和 $y=-5x$ 的图像；

(2) 观察(1)中所画的两个函数图像，它们关于 x 轴对称吗？关于 y 轴对称吗？

习题 25.2

1. 下列表述中的变量 y 与变量 x 是否成正比例？为什么？

(1) 正方形的周长 y 与它的边长 x；

(2) 某学生把每个月节约的 10 元零用钱存起来，存款总数 y(单位：元)与存款时间 x(单位：月)；

(3) 有一种笔记本，每本的厚度为 0.75 cm，将若干本笔记本叠在一起，总厚度 y(单位：cm)与笔记本的数量 x(单位：本)；

(4) 分针在钟面旋转，在一周内，旋转的角度 y(单位：度)与旋转的时间 x(单位：min).

2. 请判断下列函数是不是正比例函数. 如果是，请写出比例系数.

(1) $y=2x$；　(2) $y=-x$；　(3) $y=-\frac{x}{2}$；

(4) $y=\frac{2}{x}$；　(5) $y=2x+1$；　(6) $y=x^2$.

3. 已知正比例函数 $y=-\frac{x}{5}$，写出该函数的比例系数，并求当自变量 x 分

根据下列变量 x、y 之间的关系式，判断 y 是不是 x 的一次函数：

(1) $y=2x$；

(2) $y=1-\frac{1}{2}x$；

(3) $y=\frac{2}{x}+3$.

(1) 因为 y 是 x 的正比例函数，所以 y 是 x 的一次函数.

(2) 因为 $1-\frac{1}{2}x$ 是一次式，所以 y 是 x 的一次函数.

(3) 因为 $\frac{2}{x}+3$ 不是一次式，所以 y 不是 x 的一次函数.

已知变量 x、y 之间的关系式是 $y=(a+1)x+a$（a 是常数），那么 y 是 x 的一次函数吗?

当 $a+1\neq 0$，即 $a\neq -1$ 时，$(a+1)x+a$ 是关于 x 的一次式，这时 y 是 x 的一次函数；但当 $a=-1$ 时，得 $y=-1$，这时 y 不是 x 的一次函数.

已知 y 是 x 的一次函数，当 $x=2$ 时，$y=-1$；当 $x=5$ 时，$y=8$. 求这个一次函数的表达式.

设所求一次函数的表达式为 $y=kx+b$ ($k\neq 0$).

因为当 $x=2$ 时，$y=-1$，当 $x=5$ 时，$y=8$，所以

$$\begin{cases} -1=2k+b, \\ 8=5k+b, \end{cases}$$

解二元一次方程组，得

$$\begin{cases} k=3, \\ b=-7. \end{cases}$$

所以，这个一次函数的表达式为 $y=3x-7$.

这里求一次函数表达式的方法是待定系数法. 表达式中 k、b 是待定系数，利用两个已知条件列出关于 k、b 的方程组再求解，可确定它们的值.

课堂练习 25.3(1)

1. 下列函数中，哪些是一次函数？

(1) $y=\frac{1}{x}+1$；　　(2) $y=-2x$；

(3) $y=x^2+2$；　　(4) $y=kx+b$ (k、b 是常数).

2. 已知一次函数 $y=\frac{1}{2}x-2$.

(1) 当自变量 x 分别等于 -1、2 时，求函数值；

(2) 如果自变量为 a 时的函数值为 4，求自变量 a 的值.

3. 已知 y 是 x 的一次函数，当 $x=-3$ 时，$y=11$；当 $x=5$ 时，$y=-5$. 求这个一次函数的表达式.

2. 一次函数的图像

已知一次函数 $y=2x+2$.

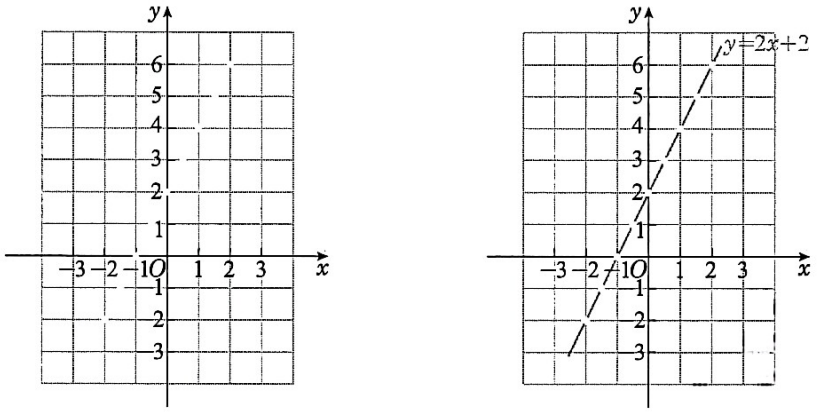
(1) 列表：取自变量 x 的一些值，计算出相应的函数值 y，见表 25-5.

表 25-5

x	…	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	…
$y=2x+2$	…	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	…

(2) 描点：分别以所取 x 的值和相应的函数值 y 作为点的横坐标和纵坐标，描出这些坐标所对应的各点，如图 25-3-1(1)所示，可以发现上述所有点均落在同一条过点(0,2)的直线上.

(3) 连线：按照横坐标由小到大的顺序，把所描出的各点用直线连接起来，如图25-3-1(2)所示.



(1)　　(2)

图 25-3-1

注意到所画直线上任意一点的坐标都满足函数的表达式 $y=2x+2$；同时，对于任意一对满足这个函数表达式的 x、y，以(x,y)为坐标的点都在所画的直线上. 因此，函数 $y=2x+2$ 的图像就是这条直线.

如图 25-3-2，比较函数 $y=2x$ 与 $y=2x+2$ 的图像，找出相同点与不同点.

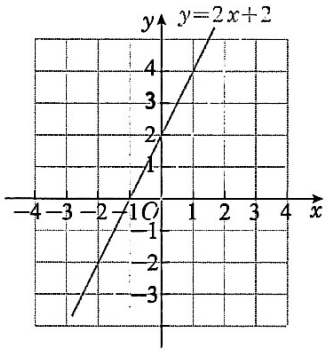


图 25-3-2

这两个函数的图像是两条互相平行的直线. 函数 $y=2x$ 的图像经过原点，函数 $y=2x+2$ 的图像与 y 轴交于点$(0,2)$. 函数 $y=2x+2$ 的图像可以看作将函数 $y=2x$ 的图像向上平移 2 个单位长度得到.

一次函数 $y=kx+b(k\neq0)$ 的图像是什么形状？它与函数 $y=kx$ $(k\neq0)$ 的图像有什么关系？

一次函数 $y=kx+b(k\neq0)$ 的图像是一条直线，也称为直线 $y=kx+b$. 一次函数的表达式 $y=kx+b(k\neq0)$ 称为这条直线的表达式. 从函数的图像看，一次函数 $y=kx+b(k\neq0)$ 的图像就是将正比例函数 $y=kx(k\neq0)$ 的图像沿 y 轴平移 $|b|$ 个单位长度. 若 $b>0$，则向上平移；若 $b<0$，则向下平移.

在平面直角坐标系 xOy 中，画一次函数 $y=\frac{2}{3}x-2$ 的图像.

由 $y=\frac{2}{3}x-2$，可知当 $x=0$ 时，$y=-2$；当 $x=3$ 时，$y=0$. 所以 $A(0,-2)$、$B(3,0)$ 是函数 $y=\frac{2}{3}x-2$ 的图像上的两点.

经过点 A、B 画直线 AB，即为函数 $y=\frac{2}{3}x-2$ 的图像，如图 25-3-3 所示.

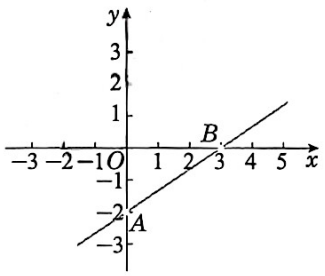


图 25-3-3

图 25-3-3 中，由点 A 的横坐标 $x=0$，可知点 A 在 y 轴上；由点 B 的纵坐标 $y=0$，可知点 B 在 x 轴上. 点 A、B 分别是函数 $y=\frac{2}{3}x-2$ 的图像与 y 轴、x 轴的交点.

画直线 $y=kx+b(k\neq0)$ 时，通常先描出该直线与 x 轴、y 轴的交点. 例 4 给出了求直线与坐标轴交点的方法.

一条直线与 y 轴交点的纵坐标称为这条直线在 y 轴上的截距，简称直线的截距. 直线 $y=kx+b(k\neq0)$ 与 y 轴交点的坐标是 $(0,b)$，故直线 $y=kx+b$

($k\neq0$)的截距是 b.

已知一次函数 $y=kx+b$ 的图像经过点 $A(-20,5)$、$B(10,20)$.

(1) 求 k、b 的值;

(2) 求该一次函数的图像与坐标轴交点的坐标.

(1) 因为一次函数 $y=kx+b$ 的图像经过点 $A(-20,5)$、$B(10,20)$,所以

$$\begin{cases}-20k+b=5,\\10k+b=20.\end{cases}$$

解这个方程组,得 $k=\frac{1}{2}$,$b=15$.

(2) 该一次函数的表达式为 $y=\frac{1}{2}x+15$.

令 $y=0$,得 $\frac{1}{2}x+15=0$,解得 $x=-30$;令 $x=0$,得 $y=15$.

所以,该一次函数的图像与 x 轴交点的坐标为$(-30,0)$,与 y 轴交点的坐标为$(0,15)$.

1. 求一次函数 $y=\frac{1}{2}x+3$ 的图像与坐标轴交点的坐标.

2. 分别在同一平面直角坐标系中画出下列各小题中函数的图像,并指出每小题中两个函数图像的位置关系.

(1) $y=2x-1$,$y=2x+1$; (2) $y=-\frac{1}{3}x-2$,$y=-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$.

3. 分别在同一平面直角坐标系中画出下列各小题中函数的图像,并指出每小题中两个函数图像的共同的特点.

(1) $y=2x-1$,$y=-\frac{1}{3}x-1$; (2) $y=-\frac{1}{3}x+2$,$y=3x+2$.

3. 一次函数的性质



借助一次函数 $y=kx+b(k\neq0)$ 的图像与正比例函数 $y=kx$ 的图像的关系，讨论当自变量 x 增大时，函数值 y 随之怎样变化.

一次函数 $y=kx+b(k\neq0)$ 具有以下性质：

(1) 当 $k>0$ 时，函数值 y 随着自变量 x 的增大而增大；

(2) 当 $k<0$ 时，函数值 y 随着自变量 x 的增大而减小.

上面这两个性质的逆命题也是成立的.

已知一次函数 $y=kx+2$ 的图像经过点 $A(-1,1)$.

(1) 求常数 k 的值；

(2) 当自变量 x 增大时，函数值 y 随之增大还是减小?

(1) 因为一次函数 $y=kx+2$ 的图像经过点 $A(-1,1)$，所以 $1=-k+2$. 解得 $k=1$.

(2) 因为 $k>0$，所以 y 随着 x 的增大而增大.

已知一次函数 $y=(1-2m)x+m+1$，且 y 随着 x 的增大而减小.

(1) 求常数 m 的取值范围；

(2) 在平面直角坐标系 xOy 中，这个函数的图像与 y 轴的交点 M 位于 y 轴的正半轴还是负半轴?

(1) 由已知条件，得 $1-2m<0$，解得 $m>\frac{1}{2}$. 所以，m 的取值范围是大于 $\frac{1}{2}$ 的一切实数.

(2) 函数 $y=(1-2m)x+m+1$ 的图像在 y 轴上的截距是 $m+1$，可知该图像与 y 轴交点 M 的坐标是 $(0,m+1)$.

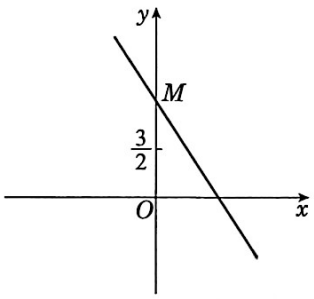


图 25-3-4

由 $m>\frac{1}{2}$，得 $m+1>\frac{3}{2}$，可知点 $M(0,m+1)$ 位于 y 轴的正半轴(图25-3-4).

已知一次函数 $y=kx+b$ 的图像可以通过将函数 $y=4x$ 的图像平移得到.

(1) 随着自变量 x 的增大，函数值 y 是增大还是减小?

(2) 函数 $y=kx+2$ 的图像经过哪几个象限?

(3) 当 $b\neq0$ 时，函数 $y=kx+b$ 的图像经过哪几个象限?

(1) 因为函数 $y=kx+b$ 的图像可以通过将函数 $y=4x$ 的图像平移得到，所以 $k=4$，从而这个一次函数的表达式为 $y=4x+b$.

由 $k>0$，可知 y 随着 x 的增大而增大.

(2) 由于函数 $y=4x+2$ 的图像可由函数 $y=4x$ 的图像向上平移 2 个单位长度得到，因此经过第一、二、三象限.

(3) 当 $b>0$ 时，函数 $y=4x+b$ 的图像可由函数 $y=4x$ 的图像向上平移 b 个单位长度得到，因此经过第一、二、三象限；当 $b<0$ 时，函数 $y=4x+b$ 的图像可由函数 $y=4x$ 的图像向下平移 $|b|$ 个单位长度得到，因此经过第一、三、四象限(图 25-3-5).

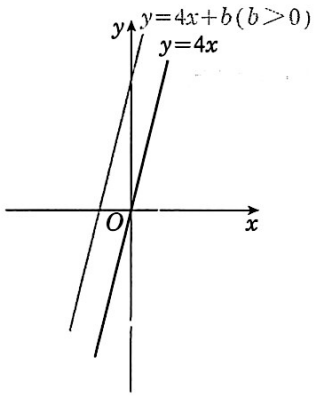


图 25-3-5

……

在平面直角坐标系 xOy 中，函数 $y=kx+b(k\neq0)$ 的图像所经过的象限与 k、b 的符号有什么关系?

1. 已知函数：①$y=-3x+1$；②$y=2x$；③$y=x-1$；④$y=\frac{1}{5}x-$5. 在这些函数中，y 随着 x 的增大而增大的函数有_____(填序号).

2. 已知一次函数 $y=(2-a)x-3$，且 y 随着 x 的增大而增大.

(1) 求常数 a 的取值范围；

(2) 指出这个函数的图像所经过的象限.

3. 已知一次函数 $y=(1-3m)x+(2m-1)$的图像经过原点，求常数 m 的值.

4. 一次函数、一次方程与一次不等式

一次函数与二元一次方程之间有密切的联系.

通过前面作函数的图像，我们已经知道函数 $y=kx+b$ 的图像是一条直线. 也就是说，该直线上任意一点的坐标(x,y)都满足二元一次方程 $y=kx+b$；同时，对于任意一对满足二元一次方程 $y=kx+b$ 的 x、y，以(x,y)为坐标的点都在该直线上.

下面，我们来讨论一次函数与一元一次方程以及一元一次不等式之间的关系.

直线 l 是函数 $y=\frac{1}{2}x-1$ 的图像，如图 25-3-6 所示. 根据图像回答：

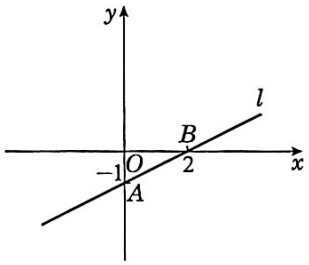


图 25-3-6

(1) 当 x 取何值时，$y=0$?

(2) 当 x 取何值时，$y>0$?

(3) 当 x 取何值时，$y<0$?

观察图 25-3-6，可以发现：

(1) 直线 l 与 x 轴交点的横坐标为 2. 因此，当 $x=2$ 时，$y=0$.

(2) 在直线 l 上且位于 x 轴上方的点，其横坐标的取值范围是 $x>2$. 因此，当 $x>2$ 时，$y>0$.

(3) 在直线 l 上且位于 x 轴下方的点，其横坐标的取值范围是 $x<2$. 因此，当 $x<2$ 时，$y<0$.

设一次函数 $y=kx+b(k\neq0)$ 的图像所表示的直线为 l，直线 l 与 x 轴交点的横坐标是关于 x 的一元一次方程 $kx+b=0$ 的解；在直线 l 上且位于 x 轴上方的点的横坐标是关于 x 的一元一次不等式 $kx+b>0$ 的解；在直线 l 上且位于 x 轴下方的点的横坐标是关于 x 的一元一次不等式 $kx+b<0$ 的解.

已知函数 $y=\frac{2}{3}x+1$.

(1) 当 x 取何值时，$y=5$?

(2) 当 x 取何值时，$y>5$?

(3) 在平面直角坐标系 xOy 中，在直线 $y=\frac{2}{3}x+1$ 上且位于 x 轴下方的所有点，它们的横坐标的取值范围是什么?

(1) 要使函数 $y=\frac{2}{3}x+1$ 的值 $y=5$，只要使 $\frac{2}{3}x+1=5$.

解方程，得 $x=6$.

所以，当 $x=6$ 时，$y=5$.

(2) 要使函数 $y=\frac{2}{3}x+1$ 的值 $y>5$，只要使 $\frac{2}{3}x+1>5$.

解不等式，得 $x>6$.

所以，当 $x>6$ 时，$y>5$.

(3) 因为所求的点在直线 $y=\frac{2}{3}x+1$ 上且位于 x 轴下方，所以它们的纵坐标 y 应小于零，得 $\frac{2}{3}x+1<0$，解得 $x<-\frac{3}{2}$.

因此，所有这样的点的横坐标的取值范围是小于 $-\frac{3}{2}$ 的一切实数.

在同一平面直角坐标系中，分别画出的一次函数 $y=-x+4$ 与 $y=3x$ 的图像. 这两个函数的图像有交点吗？如果有交点，怎样求它的坐标？

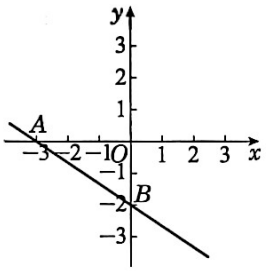
1. 已知一次函数 $y=3x+2$.

(1) 当 x 取何值时，$y=1$?

(2) 当 x 取何值时，$y>1$?

(3) 当 x 取何值时，$y<1$?

2. 如图，已知一次函数 $y=kx+b$ 的图像经过点 $A(-3,0)$、$B(0,-2)$.



(第 2 题)

(1) 求这个一次函数的表达式；

(2) 当 x 取何值时，$y>-2$?

3. 已知一次函数 $y=-\frac{1}{2}x+3$，求在这个一次函数的图像上且位于 x 轴上方的所有点的横坐标的取值范围.

习题 25.3

1. 已知下列表达式：

(1) $y=-\frac{2x-1}{5}$；　　(2) $y=\frac{1}{2x}+1$；

(3) $y=\sqrt{2}$；　　(4) $y=x^2$；

(5) $x+3y=1$；　　(6) $2x+3y=0$.

其中，y 是 x 的一次函数的有_____；y 是 x 的正比例函数的有

_____.(填写表达式的序号)

2. 已知 y 与 $x-2$ 成正比例，且当 $x=-1$ 时，$y=1$. 求 y 关于 x 的函数表达式，并求当 $x=5$ 时，y 的值.

3. 已知 y 是 x 的一次函数，当 $x=-3$ 时，$y=-6$；当 $x=3$ 时，$y=-2$. 求这个一次函数的表达式.

4. 画出下列函数的图像，并求其图像与 x 轴、y 轴交点的坐标：

(1) $y=4x-2$；　　(2) $y=-3x+1$；

(3) $y=\frac{1}{2}x+5$；　　(4) $y=-\frac{1}{3}x-1$.

5. 根据下列条件，确定一次函数的表达式：

(1) 一次函数的图像经过 $A(2,-1)$、$B(3,2)$两点；

(2) 一次函数的图像经过点 $M(1,-3)$，且与 x 轴交点的横坐标为 6.

6. 已知一次函数 $y=-3x+7$.

(1) 当 $x>2$ 时，求 y 的取值范围；

(2) 当 $y>2$ 时，求 x 的取值范围.

7. 已知一次函数 $y=(3m-1)x+m$ 的图像经过点 $P(2,2)$.

(1) 求常数 m 的值；

(2) 随着自变量 x 的增大，函数值 y 是增大还是减小?

8. 已知函数 $y=(2m-3)x+m-1$，根据下列条件分别确定常数 m 的取值范围：

(1) y 随着 x 的增大而增大；

(2) 该函数的图像与 y 轴的交点在负半轴上.

B

9. 已知一次函数 $y=(k+2)x+\frac{1-k}{2}$(k 是常数)的图像与 y 轴的交点为 $(0,1)$，求该一次函数的图像与 x 轴交点的坐标，并在平面直角坐标系中画出该函数的图像.

10. 已知一次函数 $y=kx+b$ 的图像可以通过将函数 $y=\frac{1}{3}x+3$ 的图像平移得到，该一次函数的图像与 x 轴交点的坐标为(2,0).

(1) 求该一次函数的表达式；

(2) 求该一次函数的图像与坐标轴围成的三角形的面积.

11. 已知一次函数 $y=kx+b$ 的图像经过点 $A(3,-1)$ 与点 $B(-6,5)$.

(1) 求 k 与 b 的值；

(2) 该一次函数的图像经过点 $P(a,b)$，当 $a>-3$ 时，求纵坐标 b 的取值范围；

(3) 对于该一次函数图像上的点 $M(x,y)$，当 x 取何值时，$y<-3$?

12. 已知一次函数 $y=kx+b$.

(1) 若 y 随着 x 的增大而增大，且 $kb<0$，试确定这个函数的图像所经过的象限；

(2) 若 y 随着 x 的增大而减小，且 $kb>0$，试确定这个函数的图像所经过的象限.

一次函数在现实生活中有广泛的应用，我们利用一次函数来解决一些简单的实际问题.

一根蜡烛长 30 cm，点燃后匀速燃烧 50 min 后的长度恰为原来长度的一半. 设燃烧时间为 t min，蜡烛的长度为 y cm.

(1) 写出 y 关于 t 的函数表达式以及该函数自变量的取值范围；

(2) 燃烧 40 min 后，蜡烛还剩多长？

(1) 根据题意，经过 50 min 燃烧掉的蜡烛长度也为原来的一半，即 15 cm，所以每分钟燃烧蜡烛的长度为

$$15\div 50=\frac{3}{10}\ (\text{cm}).$$

所以 y 关于 t 的函数表达式为 $y=30-\frac{3}{10}t$.

因为蜡烛长 30 cm，所以总的燃烧时间为 $30\div\frac{3}{10}=100(\text{min})$，从而自变量 t 的取值范围是 $0\leqslant t\leqslant 100$.

(2) 因为函数的表达式为 $y=30-\frac{3}{10}t$，当 $t=40$ 时，$y=18$. 所以蜡烛还剩 18 cm.

某登山运动员由大本营出发向上攀登，他所在位置的气温 y(单位：℃)与攀登的高度 x(单位：km)之间满足一次函数的表达式 $y=kx+b$，且函数的图像如图 25-4-1 所示，根据图像回答下列问题：

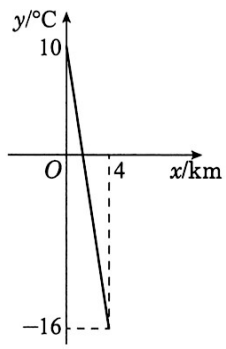


图 25-4-1

(1) 求该一次函数的表达式；

(2) 解释该一次函数的表达式中 k、b 的含义；

(3) 如果该登山运动员继续向上攀登，假设他所在位置的气温 y(单位：℃)与攀登的高度 x(单位：km)之

间的关系仍满足(1)确定的函数表达式，且零下 29 ℃是该运动员能承受的极限温度，那么他能到达的最大攀登高度为多少?

(1) 由图 25-4-1，可知该一次函数 $y=kx+b$ 的图像经过点(0,10)与点(4,−16). 所以

$$\begin{cases} b=10, \\ 4k+b=-16. \end{cases}$$

解得 $k=-6.5$，$b=10$.

所以，该一次函数的表达式为 $y=-6.5x+10$.

(2) 根据函数的表达式 $y=-6.5x+10$，可知 $k=-6.5$ 表示海拔高度每上升 1 km 温度下降 6.5 ℃；而 $b=10$ 表示大本营所在位置的气温是 10 ℃.

(3) 因为函数的表达式为 $y=-6.5x+10$，当 $y=-29$ 时，$x=6$. 所以该运动员能到达的最大攀登高度为 6 km.

一家公司招聘销售员，给出以下两种薪金方案供求职人员选择：

方案甲：每月的底薪为 5 000 元，再加每月销售额的 10%；

方案乙：每月的底薪为 2 500 元，再加每月销售额的 20%.

(1) 当月销售额为多少时，这两种方案所定的月薪相同?

(2) 当月销售额满足什么条件时，方案甲所定的月薪高于方案乙?

设月薪为 y 元，月销售额为 x 元. 根据题意，可得两种方案中 y 与 x 之间的函数关系分别为：

方案甲：$y=5\,000+\frac{1}{10}x$ $(x\geqslant 0)$；

方案乙：$y=2\,500+\frac{1}{5}x$ $(x\geqslant 0)$.

(1) 解方程组 $\begin{cases} y=5\,000+\frac{1}{10}x, \\ y=2\,500+\frac{1}{5}x, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=25\,000, \\ y=7\,500. \end{cases}$

因此，当月销售额为 25 000 元时，这两种方案所定的月薪相同.

(2) 在同一平面直角坐标系中画出两种方案中 y 关于 x 的函数图像，如

图 25-4-2 所示.

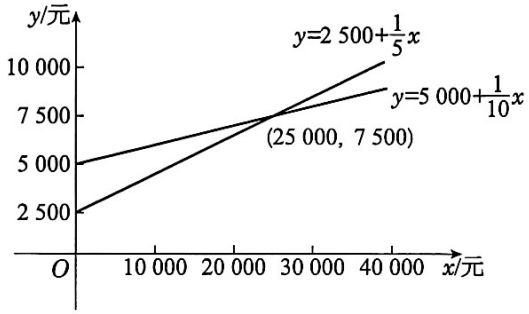


图 25-4-2

观察图像，可知当月销售额小于 25 000 元时，方案甲所定的月薪高于方案乙.

1. 某校共有 1 200 名学生，每天实际到校的学生人数 n 与学生的出勤率 p 是变量. 试说明 p 是 n 的函数，并写出这个函数的表达式.

2. 张先生准备租一处临街房屋开一家电脑公司. 现有甲、乙两套房屋出租，甲屋已装修好，每月租金 6 000 元；乙屋每月租金 4 000 元，但需要先花费 40 000 元装修. 分别写出张先生租用两套房屋所需费用 y(单位：元)关于出租时间 x(单位：月)的函数表达式.

习题 25.4

1. 某长途汽车运输公司对乘客携带行李作如下规定：一位乘客可免费携带 30 kg 行李，如果超过 30 kg，那么超过部分每千克收行李费 1 元. 设一位乘客的行李质量为 x kg($x>30$)，试写出行李费 y(单位：元)关于行李质量 x(单位：kg)的函数表达式及自变量 x 的取值范围，并画出函数的图像.

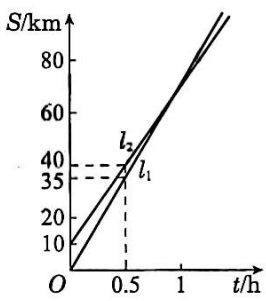
2. 一个水池的容积是 90 m^3，其内蓄有一定量的水，如果保持一定的速度向水池中蓄水，那么 1 h 后水池的水量为 15 m^3，5 h 后水池的水量为 35 m^3.

(1) 试写出水池的蓄水量 V(单位：m^3)关于蓄水时间 t(单位：h)的函数表达式；

(2) 若要让水池蓄满水，总共需要蓄水几小时？

B

3. 甲、乙两辆车正在同一条高速公路上同向匀速行驶，甲车比乙车速度快. 图中 l_1、l_2 分别表示某段时间内，甲、乙两辆车的行驶路程 S(单位：km)关于时间 t(单位：h)的函数关系，且当 $t=0$ h 时，乙车在甲车前方若干千米处. 试观察图像并回答下列问题：



(第 3 题)

(1) 分别求出甲、乙两辆车行驶路程 S 关于时间 t 的函数表达式；

(2) 甲车出发多久后追上乙车？

1. 基本概念：函数，正比例函数，一次函数.

2. 正比例函数 $y=kx(k\neq0)$的图像是一条经过原点的直线. 当 $k>0$ 时，函数值 y 随着自变量 x 的增大而增大；当 $k<0$ 时，函数值 y 随着自变量 x 的增大而减小.

3. 一次函数 $y=kx+b(k\neq0)$的图像是一条直线. 当 $k>0$ 时，函数值 y 随着自变量 x 的增大而增大；当 $k<0$ 时，函数值 y 随着自变量 x 的增大而减小.

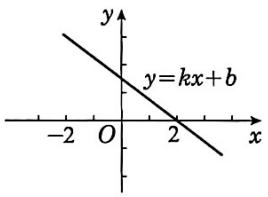
4. 一次函数 $y=kx+b$ ($k\neq0$，$b\neq0$)的图像可由正比例函数 $y=kx(k\neq0)$的图像平移得到，是一条平行于直线 $y=kx(k\neq0)$的直线.

1. 当 m _____时，函数 $y=(m-3)x+m+2$ 是正比例函数；当 m _____时，函数 $y=(m-3)x+m+2$ 是一次函数.

2. 已知正比例函数 $y=\left(1-\frac{a}{4}\right)x$，且 y 随着 x 的增大而增大. 求 a 的取值范围.

3. 如果把一次函数 $y=\frac{2}{3}x+1$ 的图像向上平移 3 个单位长度，那么所得图像的函数表达式为_____.

4. 已知一次函数 $y=kx+b$ 的图像如图所示，那么关于 x 的不等式 $kx+b>0$ 的解集是 （ ）



（第 4 题）

A. $x>0$；　　B. $x<0$；

C. $x<2$；　　D. $x>2$.

5. 已知一次函数 $y=\frac{3}{2}x+m$（m 为常数）与 $y=-\frac{1}{2}x+n$（n 为常数）的图像都经过点 $A(-2,0)$，且与 y 轴分别相交于点 B 和点 C. 求 B、C 两点的坐标.

6. 已知等腰三角形的周长为 80，腰长为 x，底边长为 y.

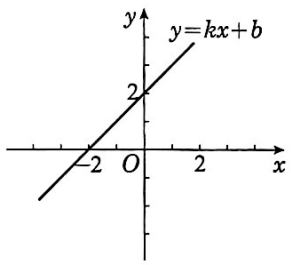
（1）写出 y 关于 x 的函数表达式；

（2）当 $x=30$ 时，求 y 的值；

（3）当 $y=8$ 时，求 x 的值；

（4）写出自变量 x 的取值范围.

7. 一次函数 $y=kx+b$ 的图像如图所示.



（第 7 题）

（1）根据图像，求 k、b 的值；

（2）在图中画出函数 $y=-2x+2$ 的图像；

(3) 当 $y=kx+b$ 的函数值大于 $y=-2x+2$ 的函数值时，x 的取值范围是什么？

8. 某电信公司手机话费的收费标准是：不管通话时间多长，每个手机号码每月必须缴月租费 20 元，且每通话一分钟再缴费 0.1 元.

(1) 写出一个手机号码每月应缴费用 y(单位：元)与通话时间 x(单位：min)之间的函数表达式；

(2) 某手机号码用户本月通话时间为 152 min，他应缴费用多少元？

(3) 如果某手机号码用户本月话费 100 元，那么该用户共通话多长时间？

B

9. 如果一次函数 $y=mx+(4m-2)$(m 是常数)的图像经过原点，那么 m _____；如果该函数的图像经过第一、三、四象限，那么 m 的取值范围是 _____，此时 y 随着 x 的增大而_____.

10. 已知一次函数 $y=-2x+1$，下列结论中正确的是 (　　)

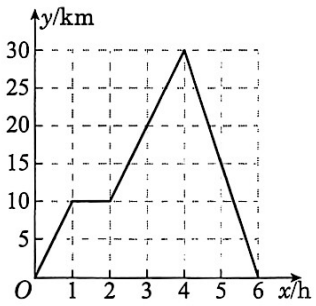
A. 该函数的图像必经过点 $P(-2,1)$；

B. 该函数的图像经过第一、二、三象限；

C. 当 $x>\frac{1}{2}$ 时，$y<0$；

D. y 随着 x 的增大而增大.

11. 某人骑车往返于甲、乙两地，距甲地的路程 y(单位：km)与骑行时间 x(单位：h)的函数图像如图所示.



(第 11 题)

(1) 甲、乙两地相距多远？此人在路上停留了多久？

(2) 此人在骑车去往乙地的过程中，停留前和停留后的速度分别是多少？

(3) 计算此人从乙地返回时的骑车速度.

12. 已知一次函数 $y=2x+b$，它的图像与两坐标轴所围成的三角形的面积是 4. 求常数 b 的值.

13. 甲骑自行车以 10 km/h 的速度匀速行驶，3 h 后，乙骑摩托车从同一地点出发与甲同线路且同向匀速行驶，速度为 25 km/h. 试回答下列问题：

(1) 设甲出发后 x h，甲离开出发地的路程为 y_1 km，乙离开出发地的路程为 y_2 km. 分别求出 y_1、y_2 与 x 之间的函数表达式，并分别写出自变量 x 的取值范围.

(2) 在同一平面直角坐标系中，画出(1)中两个函数的图像.

(3) 当 x 为何值时，乙追上甲？此时他们离出发地的路程是多少？



第26章

反比例函数

当矩形的一边长度固定时，其面积与另一边的长度成正比例. 当矩形的面积固定时，两边的长度成反比例.

许多现实问题中数量之间呈现出反比例关系，由此得到的反比例函数是又一种基本函数. 相较于一次函数，反比例函数的图像与性质有自己的特点.

通过本章的学习，可以认识到反比例函数也是表达现实世界的一种有用的数学模型.

在一块平地上，划出一个占地面积为 100 m^2 的矩形区域，这个矩形区域相邻两边的长分别为 x m、y m. 变量 x 与 y 的相互关系可以表示为

$$xy=100，即\ y=\frac{100}{x}.$$

如果变量 y 与变量 x 的乘积是一个不等于 0 的常数，那么就说变量 y 与变量 x 成反比例，用数学表达式表示为 $xy=k$ 或者 $y=\frac{k}{x}$，其中 k 是一个不等于 0 的常数.

下列表述中的两个变量是否成反比例？如果是，请用表达式表示两者的关系.

(1) 平行四边形的面积为 20 cm^2，变量分别是平行四边形的一条边长 a（单位：cm)和这条边上的高 h（单位：cm)；

(2) 在压力为 10 N 的情况下，变量分别是物体承受的压强 p(单位：Pa)和它的受力面积 S（单位：m^2).

(1) 因为平行四边形的面积等于其一条边长 a 和这条边上的高 h 的乘积，可知 $ah=20\ (cm^2)$，所以 a 与 h 成反比例，其关系可表示为 $a=\frac{20}{h}$.

(2) 因为压力等于物体承受的压强 p 和受力面积 S 的乘积，当压力为 10 N 时，$pS=10$，所以 p 与 S 成反比例，其关系可表示为 $p=\frac{10}{S}$.

如果两个变量成反比例，就可以把其中一个变量看作是另一个变量的函数.

一般地，形如 $y=\frac{k}{x}$ (k 是常数，$k\neq0$)的函数叫作反比例函数，其中自变量 x 的取值范围是不等于零的一切实数，y 是 x 的函数. 非零常数 k 称为比例系数.

要确定一个反比例函数，就是要确定比例系数 k 的值.

我们知道，一次函数 $y=kx+b$（k、b 是常数，$k\neq0$）的图像是一条直线. 那么，反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（$k\neq0$）的图像是什么呢？我们先用“描点”的方法，画出反比例函数的图像，再利用图像来研究反比例函数的性质.

首先考察 $k>0$ 的情形. 以反比例函数 $y=\frac{1}{x}$ 为例.

（1）列表：取自变量 x 的一些值，计算出相应的函数值，见表 26-1，注意 x 不能取 0.

表 26-1

x	…	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	…
$y=\frac{1}{x}$	…	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-3	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	…

（2）描点：分别以所取 x 的值和相应的函数值 y 作为点的横坐标和纵坐标，描出这些坐标所对应的点，如图 26-2-1 所示.

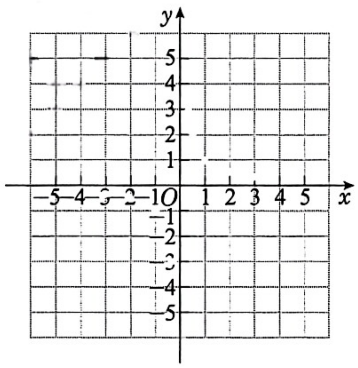


图 26-2-1

（3）连线：按照横坐标由小到大的顺序，把所描出的各点用光滑的曲线连接起来，就得到函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图像，如图 26-2-2 所示.

按照前述操作的步骤，画出反比例函数 $y=\frac{3}{x}$ 的图像，如图 26-2-3 所示.

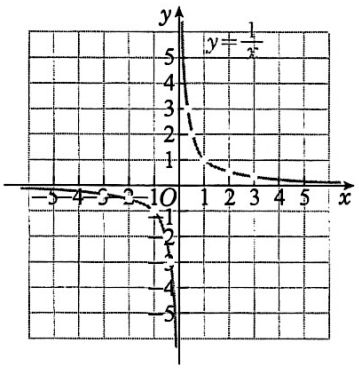


图 26-2-2

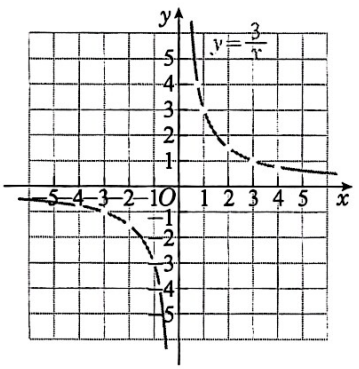


图 26-2-3

反比例函数 $y=\frac{1}{x}$ 与 $y=\frac{3}{x}$ 的图像有哪些共同特点？

观察这两个函数的图像，可以发现：

（1）每个函数的图像都有两支曲线，分别位于第一、三象限；

（2）在第一、三象限内，函数图像均下降；

（3）图像的每支都向两个方向无限延伸，分别向 x 轴、y 轴靠近，但不会与它们相交.

图像的上升或下降，是对图像变化规律的直观描述. 一般情况下，观察方向都是沿着 x 轴正向从左向右看.

再考虑 $k<0$ 的情形，可以通过描点法作出反比例函数 $y=-\frac{1}{x}$ 与 $y=-\frac{3}{x}$ 的图像(图 26-2-4).

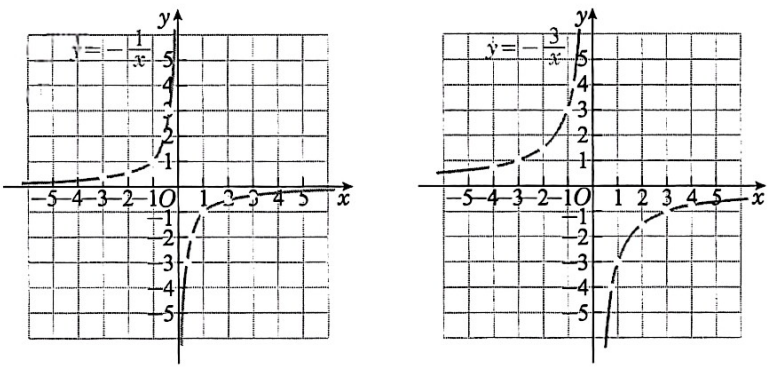


图 26-2-4

反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$的图像由两支曲线组成，它具有如下性质：

(1) 图像的每支都无限接近于 x 轴与 y 轴，但不会与它们相交.

(2) 当 $k>0$ 时，y 与 x 同号，两支曲线分别位于第一、三象限；在第一、三象限内，其图像均下降，即 y 随着 x 的增大而减小.

(3) 当 $k<0$ 时，y 与 x 异号，两支曲线分别位于第二、四象限；在第二、四象限内，其图像均上升，即 y 随着 x 的增大而增大.

反比例函数的图像是双曲线.

1. 在同一平面直角坐标系中，分别画出下列函数的图像：

(1) $y=\frac{4}{x}$；　　(2) $y=-\frac{4}{x}$.

2. 已知下列反比例函数：

$$y=\frac{2}{x},\ y=-\frac{1}{x},\ y=-\frac{1}{2x},\ y=-\frac{3}{50x}.$$

其中，图像位于第一、三象限的函数是_____；在其图像所在的每个象限内，y 随着 x 的增大而增大的函数是_____.

3. 如果反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ $(k\neq0)$的图像位于第二、四象限，那么 k_____0；在图像的每一支上，y 随着 x 的增大而_____.

已知某反比例函数的图像经过点 $A(2,3)$.

(1) 这个函数的图像位于哪些象限？

(2) 若点 $B(3,a)$、$C(b,-5)$也在这个函数的图像上，求 a、b 的值.

(1) 反比例函数图像的位置只有两种可能：位于第一、三象限，或者位于第二、四象限.

因为点 $A(2,3)$ 在第一象限，所以这个函数的图像位于第一、三象限.

(2) 设这个反比例函数的表达式为 $y=\frac{k}{x}$ $(k\neq0)$.

因为点 $A(2,3)$ 在其图像上，所以

$$3=\frac{k}{2}.$$

解得 $k=6$.

因此，这个反比例函数的表达式为 $y=\frac{6}{x}$.

因为点 B、C 的坐标都满足 $y=\frac{6}{x}$，代入得 $a=\frac{6}{3}$ 及 $-5=\frac{6}{b}$，从而解得 $a=2$，$b=-\frac{6}{5}$.

如图 26-2-5，已知反比例函数 $y=\frac{2k+1}{x}$ 图像的一支，请回答下列问题：

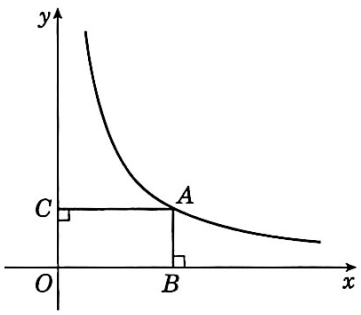


图 26-2-5

(1) 图像的另一支位于哪个象限？k 的取值范围是什么？

(2) 在这个函数图像的某一支上任取点 $M(x_1,y_1)$ 和点 $N(x_2,y_2)$. 如果 $x_1<x_2$，那么 y_1 和 y_2 有怎样的大小关系？

(3) 如图 26-2-5，设 A 是图像上任意一点，过点 A 分别作 x 轴、y 轴的垂线，垂足分别为 B、C，请用含 k 的代数式表示矩形 $OBAC$ 的面积.

(1) 因为这个函数图像的一支位于第一象限，所以另一支必位于第三象限.

因为这个函数的图像位于第一、三象限，所以

$$2k+1>0.$$

解得 $k>-\frac{1}{2}$.

(2) 因为 $2k+1>0$，所以在这个函数图像的任一支上，y 随着 x 的增大而减小，因此当 $x_1<x_2$ 时，$y_1>y_2$.

(3) 设点 $A(x_0,y_0)(x_0>0,y_0>0)$.

由点 A 在这个函数的图像上，得

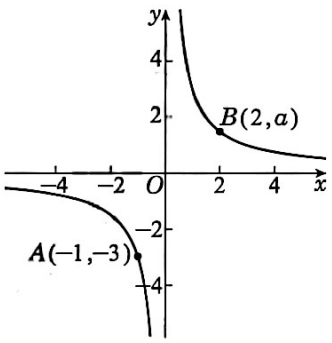
$$y_0=\frac{2k+1}{x_0}.$$

在矩形 $OBAC$ 中，$OB=x_0$，$OC=y_0$，则它的面积

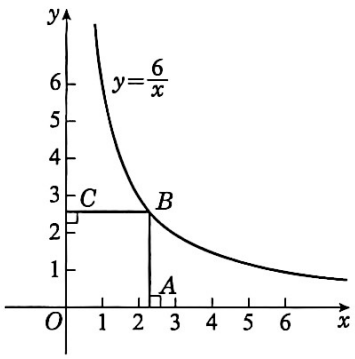
$$S=x_0y_0=2k+1.$$

1. 当 k 满足什么条件时，反比例函数 $y=\frac{3k-1}{x}$ 的图像有一支在第二象限?

2. 如图，点 $A(-1,-3)$、$B(2,a)$ 在某个反比例函数的图像上. 求这个反比例函数的表达式与 a 的值.



(第 2 题)



(第 3 题)

3. 如图，已知点 B 在函数 $y=\frac{6}{x}$ 的图像上，且位于第一象限，过点 B 分别向 x 轴、y 轴作垂线，垂足分别为 A、C. 求矩形 $OABC$ 的面积.

习题 26.2

1.（1）已知反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图像经过点 $\left(\frac{4}{5},-\frac{3}{4}\right)$，那么 $k=$_____，函数图像所在的每个象限内，y 随着 x 的增大而_____；

（2）已知点 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$在反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k<0)$的图像上，且 $0<x_1<x_2$，那么 y_1 _____ y_2(填“>”“<”或“=”).

2. 已知反比例函数 $y=\frac{k}{x}$的图像上一点的坐标为$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$，求这个反比例函数的表达式，并画出它的图像.

3. 分别根据下列条件判断反比例函数 $y=\frac{k}{x}$的图像所在的象限：

（1）$k<0$；

（2）$k>0$；

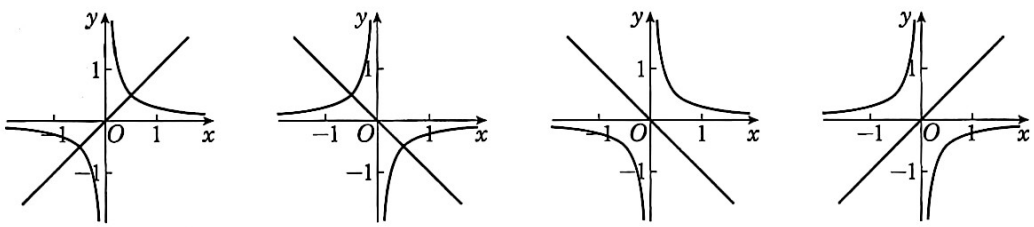
（3）图像上一点的坐标为$(-\sqrt{2},\pi)$；

（4）与正比例函数 $y=-2x$ 的图像有公共点.

B

4. 选择题：

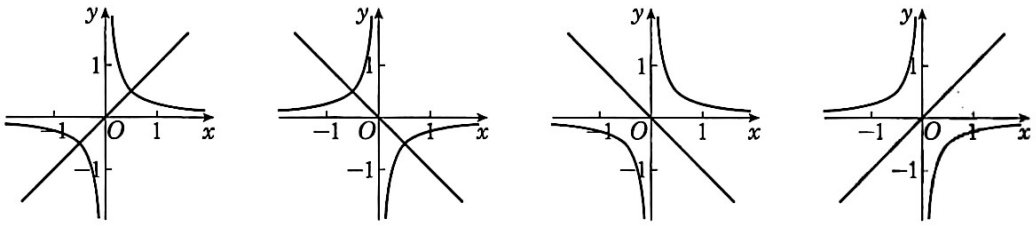
（1）设 $k<0$，那么函数 $y=-\frac{x}{k}$与 $y=\frac{k}{x}$在同一平面直角坐标系中的大致图像可能是 （ ）



A. B. C. D.

(2) 在同一平面直角坐标系中，函数 $y=kx$ 与 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$ 的大致图像可能是 (　　)

A. ①②；　　B. ①③；　　C. ②④；　　D. ③④.



①　　②　　③　　④

(第4(2)题)

5. 已知反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图像经过点 $A(-2,3)$.

(1) 求这个反比例函数的表达式；

(2) 如果正比例函数 $y=k_1x$ 的图像与这个反比例函数的图像有公共点，那么 k_1 的取值范围是什么？

6. 已知变量 y 与 x 成正比例，变量 z 与 x 成反比例($x\neq0$). 求 y 与 z 之间的比例关系.

某一类帆船的主帆呈三角形，其示意图如图26-3-1所示. 已知$\triangle ABC$的面积为50 m^2. 设边BC的长为x m，边BC上的高AD长为y m.

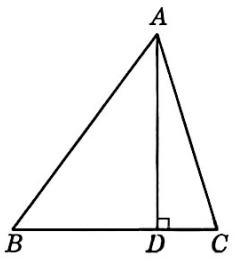


图26-3-1

(1) 求y关于x的函数表达式；

(2) 考虑到船体的稳定性，需满足$8\leqslant x\leqslant 10$. 求y的取值范围.

(1) 根据题意，得$50=\frac{1}{2}xy$. 所以，所求函数的表达式为$y=\frac{100}{x}$.

(2) 当$x=8$时，$y=12.5$；当$x=10$时，$y=10$.

因为$x>0$且$100>0$，所以函数图像在第一象限，y随着x的增大而减小. 因此，若要满足$8\leqslant x\leqslant 10$，y的取值范围为$10\leqslant y\leqslant 12.5$.

如图26-3-2，建筑工人欲用撬棒将生锈的钉子拔出. 已知钉子产生的最大阻力为200 N，阻力臂为0.04 m. 设动力为F N，动力臂为l m.(当杠杆平衡时，动力×动力臂＝阻力×阻力臂. 图中杠杆本身所受重力忽略不计.)

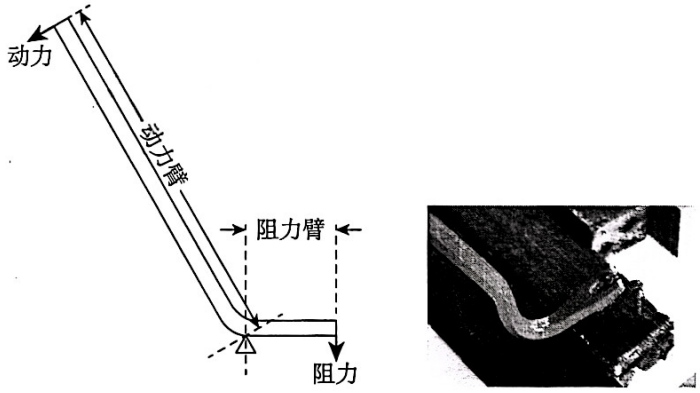


图26-3-2

(1) 求F关于l的函数表达式，并判断这个函数是不是反比例函数. 如果是，请写出比例系数；

(2) 若动力臂为0.2 m，当力至少大于多少时，才能撬动钉子？

(3) 利用F关于l的函数表达式，说明当动力臂扩大为原来的$n(n>1)$倍

时，所需动力将如何变化.

（1）由动力×动力臂＝阻力×阻力臂，得

$$Fl=200\times0.04=8\ (\mathrm{N\cdot m}).$$

从而 F 关于 l 的函数表达式为

$$F=\frac{8}{l}.$$

这个函数是反比例函数，比例系数是 8.

（2）当 $l=0.2$ 时，

$$F=\frac{8}{0.2}=40\ (\mathrm{N}),$$

此时杠杆平衡，所以撬动钉子的力至少大于 40 N.

（3）设原来的动力臂为 d m，动力为 F_1 N；扩大后的动力臂为 nd m($n>1$)，动力为 F_2 N.

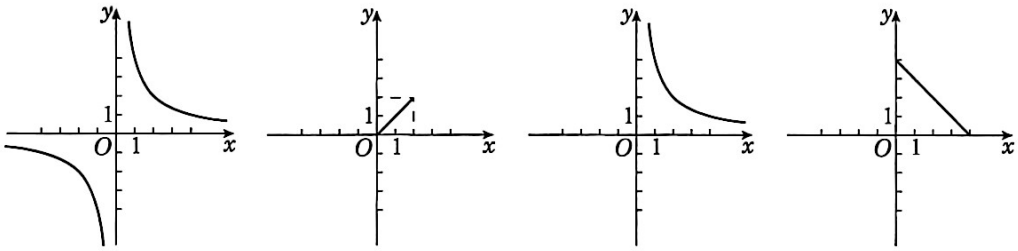
将 $l=d$，$l=nd$ 分别代入 $F=\frac{8}{l}$，得

$$F_1=\frac{8}{d},\ F_2=\frac{8}{nd}.$$

故 $F_2=\frac{1}{n}F_1$.

所以，当动力臂扩大为原来的 n 倍时，所需动力缩小为原来的 $\frac{1}{n}$.

1. 已知△ABC 的面积等于 2，设这个三角形的一边长为 x，此边上的高为 y，那么 y 关于 x 的函数图像大致是 （　　）



A.　　B.　　C.　　D.

2. 从A地到B地高速公路的路程为300 km，假设汽车以v km/h的速度匀速行驶，且速度限定为不超过120 km/h，记汽车行驶的时间为t h. 求v关于t的函数表达式和自变量t的取值范围.

习题 26.3

1. 已知一个矩形花坛的面积是20 m^2，相邻两边的长分别是x m及y m. 求y关于x的函数表达式.

2. 某汽车的油箱一次加满汽油45 L，可行驶y km. 设该汽车每行驶100 km耗油x L，求y关于x的函数表达式(假设汽车能行驶至油用完).

B

3. 工厂要修建一个容积为2 000 m^{3}的长方体蓄水池，受占地面积限制，蓄水池的长和宽的限定范围均在20 m至40 m之间(包含20 m与40 m). 设蓄水池的底面积为S m^2，深度为h m. 求S关于h的函数表达式和自变量h的取值范围.

1. 基本概念：反比例函数.

2. 反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ $(k\neq0)$的图像与性质.

(1) 双曲线的两支分别无限接近于 x 轴和 y 轴，但不会与它们相交.

(2) 当 $k>0$ 时，y 与 x 同号，双曲线的两支分别位于第一、三象限；在第一、三象限内，其图像均下降，即 y 随着 x 的增大而减小.

(3) 当 $k<0$ 时，y 与 x 异号，双曲线的两支分别位于第二、四象限；在第二、四象限内，其图像均上升，即 y 随着 x 的增大而增大.

1. 用函数表达式表示下列问题中两个变量之间的关系，并指出哪些是反比例函数.

(1) 面积为 12 的三角形的底边长为 x，高为 y；

(2) 购买单价为 9 元的圆珠笔 x 支，共用了 y 元；

(3) 以 x L/min 的速度向容积为 2 L 的饮料瓶中注水，注满水需要 y min.

2. 在同一平面直角坐标系中，分别画出函数 $y=\frac{3}{2x}$，$y=-\frac{3}{2x}$ 的图像.

3. 已知反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq 0)$ 的图像经过点 $(1,-2)$.

(1) 求这个反比例函数的表达式；

(2) 当 $x=3$ 时，求 y 的值；

(3) 当 $-2\leqslant x\leqslant -1$ 时，求 y 的取值范围.

4. 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图像上任取一点 P，分别向 x 轴与 y 轴作垂线. 求这两条垂线与坐标轴所围成的矩形的面积(用含 k 的代数式表示).

5. 已知近视眼镜镜片的度数 y(单位：度)与镜片焦距 x(单位：m)成反比例. 若 200 度近视眼镜镜片的焦距为 0.5 m，求 y 关于 x 的函数表达式.

B

6. 在反比例函数 $y=\frac{3k-2}{x}$ 的图像的每一支上，y 都随着 x 的增大而减小. 求 k 的取值范围.

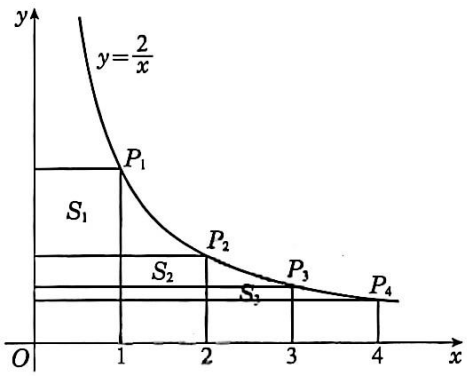
7. 已知一个梯形的面积为 60，上底长是下底长的 $\frac{1}{3}$. 设该梯形的下底长为 x，高为 y. 求 y 关于 x 的函数表达式.

8. 一艘船计划装载 900 t 货物，若以最快速度装船，需 1 h 完成.

(1) 写出装完货物所需的时间 y(单位：h)与装船速度 x(单位：t/h)之间的函数表达式，并写出自变量 x 的取值范围；

(2) 若要求在 1.5 h 至 2 h 之间(包含 1.5 h 与 2 h)装完这批货物，求装船速度的取值范围.

9. 如图，在反比例函数 $y=\frac{2}{x}$ $(x>0)$ 的图像上有点 P_1、P_2、P_3、P_4，它们的横坐标依次为 1、2、3、4，分别过这些点作 x 轴与 y 轴的垂线. 图中所构成的涂色部分的面积从左到右依次为 S_1、S_2、S_3，计算 $S_1+S_2+S_3$ 的值.



(第 9 题)



综合与实践

折纸与数学

神奇的密码

折纸与数学

折纸是一种比较普及的手工技艺，纸飞机、千纸鹤是我们常见的折纸作品(图 1). 折纸与数学有着密切的联系. 例如，我们可以将几何学原理运用到折纸中，也可以利用折纸来研究几何学.



图 1

1. 班级分组：建议全班以小组为单位展开活动，每组 4～6 人；
2. 活动工具：根据不同的活动准备各类纸片；
3. 结合下面给出的活动内容，各小组成员进行任务分工.

折纸与线段

测量一张 A4 纸的长和宽，对折并测量对折后所得纸的长和宽，再沿垂直于上次折痕的方向对折并测量，以此类推，将数据记录下来，并填入表 1.

表 1

折叠次数	宽/cm	长/cm	宽与长的比值
0			
1			
2			
3			
…			

1. 表 1 中的纸片在折叠过程中，新图形的宽和长都在不断缩短，宽与长的比值是否也会发生变化？

2. 你能用一张长方形纸片折出一个正方形吗？

3. 通过折纸，可以得到原图形的$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{8}$……，同样的办法也能得到已知线段的 $\frac{1}{2}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{8}$ ……. 那么，利用折纸，你是否能得到已知线段的 $n\sqrt{2}$、$n\sqrt{3}$、$n\sqrt{5}$（n 为正有理数）？

折纸与角

下面我们利用一张矩形纸片试折出一个 60°角.

第一步：对折矩形纸片 $ABCD$，使 AD 与 BC 重合，得到折痕 MN，把矩形纸片展开；

第二步：再次折叠纸片，使点 A 落在 MN 上，记为点 A'，使折痕经过点 B，得到折痕 BE，同时得到线段 $A'E$（图 2）.

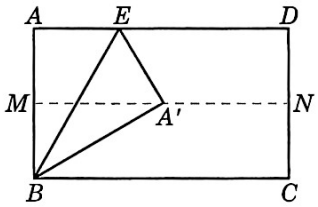


图 2

1. 在图 2 中，你能找出 60°角吗？还能找到哪些度数的角？证明你的结论.

2. 在图 2 中，你能找到等边三角形吗？如果是一张正方形纸片，你有其他折出一个等边三角形的方法吗？

3. 你能用一张正方形纸片折出 108°、36°、72°的角吗？

折纸与正方形

创作折纸作品的基本材料通常是一张正方形纸片，人们通过合理的想象、技巧的运用及不懈的努力把它转变为任意的形状. 从折纸作品展开摊平后留在正方形纸片上的折痕中，可以找出许多几何图形并发现一些有趣的数量与关系.

1. 请利用折纸来判断手中的纸片是否一定是正方形，并说明理由；

2. 请把一张正方形纸片折成你喜欢的任意一种样式，如千纸鹤（图 3）、纸飞机、纸青蛙等，展开后研究折痕（长度、夹角等）；

3. 尝试制作一份折纸说明书，将你最喜欢的一种样式分享给其他同学.

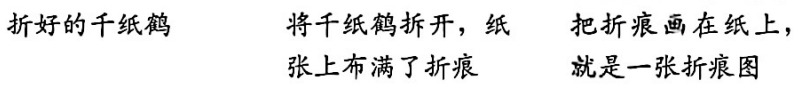


图 3

折纸与生活

生活中，有很多的物品与折纸相关，最常见的就是折扇和传统的纸伞.

1. 请只用纸，仿制一把传统的伞；

2. 设计并制作一个与折纸相关的作品，并谈谈你的设计思路.

神奇的密码

密码是一种将可识别的信息(明文)转换为秘密信息(密文)的技术，这个过程称为“加密”；而密文是可以破解的，这个过程称为“解密”. 明文与密文之间转换的关键是密钥(常用 k 表示).

恺撒密码

恺撒密码是世界上最古老的加密技术之一，采用位移加密方法：明文中的所有字母都按照一个固定数值在字母表上向后(或向前)进行移位后形成密文. 例如，向前移动 3 位(密钥 $k=3$)的恺撒密码如图 1 所示：

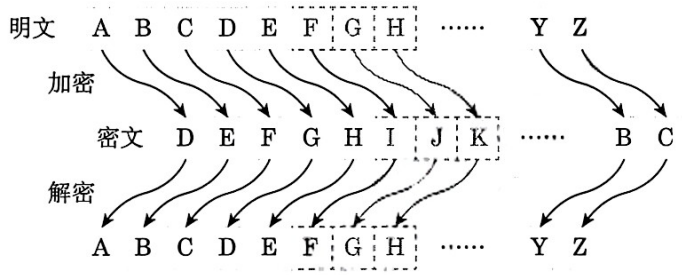


图 1

这个密钥将 A 变为 D，将 D 变为 G，以此类推，用这个密钥加密，earth 就变成了 hduwk. 请利用恺撒密码的编码方式，完成以下任务：

已知密钥 $k=2$，加密 I love Shanghai，其中所示空格在密文中仍为空格.

已知密钥 $k=3$，密文为 vwxghqw 所对应的明文是什么?

为方便使用恺撒密码进行加密和解密，可以使用密码盘(图 2). 通过转动密码盘的内圈轮盘(密文)，获知的外圈轮盘(明文)字母所对应的字母，即为加密后的密文字母. 请使用密码盘回答下列问题：

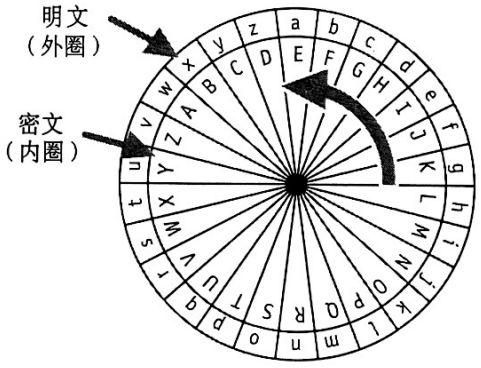


图 2

当密钥 k 分别是 5、8、12 的情况下，明文 u 对应的密文分别是什么？

当明文 sky 对应的密文是 iao 时，请找出密钥 k，并利用同一密钥加密 plane.

维吉尼亚密码

恺撒密码的弱点在于使用单一数值作为密钥进行移位加密，很容易被破译，为此出现了使用一组不同数值来进行移位加密的方法——维吉尼亚密码.

该方法使用步骤如下：

1. 将明文的字母转化为对应的数字：用数字 0～25 顺次替代字母表中的 26 个字母，如 mathematician 转化为 12，0，19，7，4，12，0，19，8，2，8，0，13.

2. 确定密钥：选择一个单词或字母组合作为密钥，字母的个数称为密钥长度，按如上方式将密钥转化成数字串，如 world 转化为 22，14，17，11，3.

3. 将明文的字母根据以上密钥数字串依次进行移位. 移位过程中，若明文长度超过密钥长度，则将密钥数字串依次重复使用，具体如表 1 所示：

表 1

明文	m	a	t	h	e	m	a	t	i	c	i	a	n
	12	0	19	7	4	12	0	19	8	2	8	0	13
密钥	w	o	r	l	d	w	o	r	l	d	w	o	r
	22	14	17	11	3	22	14	17	11	3	22	14	17
明文＋密钥＝	34 (8)	14	36(10)	18	7	34(8)	14	36(10)	19	5	30(4)	14	30(4)
密文	i	o	k	s	h	i	o	k	t	f	e	o	e

注：括号中的数字表示，当明文数字＋密钥数字≥ 26 时，需减 26，如：8＝34－26.

已知明文为 I am a student，密钥为 shanghai，密文是什么？

已知密文为 I am a student，密钥为 shanghai，明文是什么？

将明文 Mathematics：The beautiful language of the universe 利用维吉尼亚密码加密后的密文为 Euilveuimtk：Nwi swujxzxoa prfajexw iu xyw ocmmwlhi，请推算相应的密钥.

部分中英文词汇索引

多边形，n 边形	polygon	2
梯形	trapezoid	8
平行四边形	parallelogram	8
矩形	rectangle	22
菱形	rhombus	26
正方形	square	31
（三角形的）重心	barycenter (of a triangle)	40
直角坐标系	Cartesian coordinate system	52
坐标轴	coordinate axes	52
原点	origin	52
横轴	axis of abscissas	53
纵轴	axis of ordinates	53
坐标	coordinate	54
横坐标	abscissa	54
纵坐标	ordinate	54
象限	quadrant	54
函数	function	86
图像	graph	88
正比例函数	proportional function	91
一次函数	linear function	100
反比例函数	inversely proportional function	122